

Sidney Coleman 的量子场论课程

梁旭民译

2024 年 7 月 27 日

前言

目录

第一章 量子力学加入狭义相对论	1
1.1 介绍性说明	1
1.2 质量为 μ 的单个自由无自旋粒子的理论	6
1.3 位置算符 X 的确定	11
第二章 最简单的多粒子理论	18
2.1 描述多粒子状态的第一步	18

第一章 量子力学加入狭义相对论

1.1 介绍性说明

这里是物理 253, 相对论量子力学课程。这门课程因其难度而声名狼藉, 随着课程的深入, 你会发现这个名声是实至名归的。在非相对论量子力学中, 旋转不变性简化了散射问题。为什么加入狭义相对论, 也就是包括 Lorentz 不变性, 会使量子力学复杂化?

在能量为 $E \geq mc^2$ 时, 加入相对论是必要的。在这些能量下, 反应

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0$$

是可能发生的。在稍高的能量下, 反应

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

可能发生。高能散射问题的精确求解必然涉及多粒子过程。

你可能会认为, 对于一个给定的 E , 只有有限数量的过程, 也许只是很少数量的过程, 真正做出了贡献。但你从非相对论量子力学中已经知道, 事实并非如此。例如, 如果在 Hamilton 量 H 中加入一个扰动 δV , 基态能量 E_0 会根据以下规则发生变化

$$E_0 \rightarrow E_0 + \delta E_0 \quad \text{其中} \quad \delta E_0 = \langle 0 | \delta V | 0 \rangle + \sum_n \frac{|\langle 0 | \delta V | n \rangle|^2}{E_0 - E_n} \quad (1.1)$$

所有能量的中间状态都有贡献, 但被能量分母所抑制。

对于低能量下的高精度计算, 包含 $(v/c)^2$ 数量级的相对论效应是合理的。含有额外粒子的中间态也会贡献相同数量级的修正:

$$\frac{(\text{问题中的典型能量})}{(\text{典型能量分母})} \sim \frac{E}{mc^2} \sim \frac{mv^2}{mc^2} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (1.2)$$

作为一般结论, 相对论运动学的修正和多粒子中间态的修正是相当的; 相对论迫使你考虑多体问题。

然而有一些非常特殊的情况，由于涉及到特定的动力学，相对论的运动学效应远远大于成对态的效应。氢原子就是其中之一。这就是为什么 Dirac 的理论¹，即使在不考虑成对产生和多粒子中间态的情况下，也能给出氢原子的 $(v/c)^2$ 数量级的优异结果。这是一种侥幸²。Dirac 的成功是一件好事，因为它告诉人们基本思想是正确的，但它也是一件坏事，因为它导致人们花费大量时间去担心单粒子、双粒子和三粒子理论，因为他们没有意识到氢原子是一个非常特殊的系统。我们将看到，没有成对产生，就不可能有一致的相对论图景。

单位

因为我们在做相对论 (c) 量子力学 (\hbar)，我们选择单位使得

$$\hbar = c = 1 \quad (1.3)$$

这就给我们留下了一个自由单位。通常情况下在给定的问题中，我们会选择它作为一个有趣粒子的质量，然后把它设为 1。我们永远不会因此遇到任何问题。只要记住，像挠头这样的普通宏观运动具有无穷小的速度和天文数字般的角动量！因此，在量纲分析下

$$[m] = [E] = [T]^{-1} = [L]^{-1} \quad (1.4)$$

此外，还需要知道

$$(1 \text{ fermi})^{-1} \approx 197 \text{ MeV}; \quad m_e \approx 0.5 \text{ MeV} = 7.8 \times 10^{20} \text{ s}^{-1} = 2.6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-1} \quad (1.5)$$

我们称质子的 Compton 波长的负一次方为“1GeV”。

Lorentz 不变性

我们将要学习的所有物理知识的舞台都是 Minkowski 空间，即平坦时空，在这个空间里，有一堆用四个坐标标注的点。我们把这些坐标写成一个 **4 向量 (4-vector)**：

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \mathbf{x}) \quad (1.6)$$

¹[编者注] P. A. M. Dirac, “The Quantum Theory of the Electron”, Proc. Roy. Soc. Lond. A **117** (1928) 610–624; “The Quantum Theory of the Electron. Part II”, Proc. Roy. Soc. Lond. A **118** (1928) 351–361.

²[编者注] 见 H. Bethe and E. Salpeter, Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms, Plenum Publishing, 1977, p. 77 和里面的文献；由 Dover Publications 2008 年再版；和 M. E. Rose, Relativistic Electron Theory, Wiley, 1961, pp. 193–196. Rose 显式说明了当 $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ 时氢原子核附近正电子密度的抑制，并将这种抑制归因于作用于正电子的 Coulomb 斥力。

有时,在不产生混淆的情况下,我会省略指标 μ , 简单地把 x^μ 写成 x 。这并不是我们要处理的唯一的四个分量对象。在经典力学中,还有粒子的动量,我们称为 p^μ ;

$$p^\mu \equiv (p^0, \mathbf{p}) \quad (1.7)$$

这个 4 向量的第零分量,即时间分量,有一个特殊的名字:能量。空间分量 \mathbf{p} 当然叫做动量,有时我会把 p^μ 写成 p 。我可以不加区分地把 p 写成 k , 因为 $\hbar = 1$ 。 k^μ 的时间分量 k^0 是频率 ω 。任何逆变 4 向量 a^μ 都可以写成 $a^\mu = (a^0, a^i) = (a^0, \mathbf{a})$; 同样,协变 4 向量 $a_\mu = (a_0, a_i) = (a_0, -\mathbf{a})$ 。两个 4 向量 $a^\mu b^\nu$ 之间的四维内积 $a \cdot b$ 是

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.8)$$

其中 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 是通常的 3 向量内积。如上所述,我们将采用所谓的 Einstein 求和约定,我想大家对此并不陌生,其中隐含了对重复指标的求和。这个内积在 Lorentz 变换下是不变的。请注意,我采用的是“西海岸”度规约定,³, (+ - - -)。4 向量 a^μ 与自身的内积通常写作 a^2 ;

$$a^2 \equiv a^\mu a_\mu = a^0 a_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad (1.9)$$

内积也可以写成

$$g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (1.10)$$

其中,度规张量 (metric tensor) $g_{\mu\nu}$ 定义为

$$g_{00} = 1 = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} \quad (1.11)$$

该对象用于降指标

$$g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu \quad (1.12)$$

有一个升指标的对象也很方便。我们将上指标的度规张量定义为下指标的度规张量的逆矩阵;

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (1.13)$$

其中, δ_μ^ν 是 Kronecker delta 记号,

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \mu = \nu \\ 0, & \text{如果 } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (1.14)$$

³[编者注] 本课程的官方教材是 James D. Bjorken 和 Sidney D. Drell, McGraw-Hill 分别于 1964 和 1965 年出版的两卷本《相对论量子力学》和《相对论量子场》。Coleman 于 1975 年这样评价这两本书:“我将努力使我的记号与 Bjorken 和 Drell 的统一。这是目前最好的。通过客观测试,人们喜欢这本书:它是物理研究最常被盜的书。”

这个方程很容易求解；如果我们选取的单位是 $c = 1$ ，那么 $g^{\mu\nu}$ 在数值上等于 $g_{\mu\nu}$ 。

4 向量上的 Lorentz 变换将用 4×4 矩阵 Λ_ν^μ 表示。这些矩阵对 4 向量的作用如下：

$$\Lambda : x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \equiv \Lambda x \quad (1.15)$$

因为内积具有不变性，

$$\Lambda a \cdot \Lambda b = a \cdot b \quad (1.16)$$

数学意义上，Lorentz 变换构成了一个群 (**group**): 任意两个 Lorentz 变换的乘积是一个 Lorentz 变换，一个 Lorentz 变换的逆是一个 Lorentz 变换，以此类推。这个群有一个名字： $O(3, 1)$ 。 O 表示正交群。 $(3, 1)$ 意味着它不完全是一个正交群，因为内积中的三个项是一个符号，而第四个项是另一个符号。事实上，这个群对于我们的目的来说有点太大了，因为它包括了自然的并非不变的变换：宇称和时间反转，而你们可能知道，它们被弱相互作用打破了。在本课程中，我们将严格局限于连通的 Lorentz 群，即那些可以从恒元通过连续变化中获得的 Lorentz 变换。因此，我们排除了宇称和时间反转等内容。数学家们称连通⁴Lorentz 群为 $SO(3, 1)$ ，其中的 S 表示“特殊”，即矩阵的行列式等于 1。如果我们讨论的是旋转，那么我们关注的就不是所有的正交变换，而是正确意义上的旋转，不包括反射。全 Lorentz 群的每个元素都可以写成连通 Lorentz 群的元素与以下元素的乘积： $\{1, P, T, PT\}$ 。宇称算符 P 反映了所有三空间分量，

$$P : \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} \quad (1.17)$$

时间反演算符 T 反演时间 t ； $T : t \rightarrow -t$ ，而 PT 是两者的乘积。我们所说的 Lorentz 不变性是在 $SO(3, 1)$ 下的不变性。在 Lorentz 群的作用下，4 向量分为三类：**类时的 (timelike)**，**类空的 (spacelike)** 和**类光的 (null 或 lightlike)**。这些术语描述了 4 向量 a^μ 的不变平方；

$$a^\mu \text{ 被称为 } \begin{cases} \text{类时的, 如果 } a^2 > 0 \\ \text{类空的, 如果 } a^2 < 0 \\ \text{类光的, 如果 } a^2 = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

同样的术语也适用于 4 向量内积。给定两个 4 向量 x 和 y ，它们之间的差 $(x - y)$ 的不变平方，即： $(x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) = (x - y)^2$ ，将被称为**分隔 (separation)** 或**间隔 (interval)**。

⁴[编者注] 严格来说，连通 Lorentz 群是正时 Lorentz 群， $SO^+(3, 1)$ ，即保持 4 向量第零分量的符号的 $SO(3, 1)$ 的子群。

实际上,世界应该是在一个更大的、但并不更迷人的群下不变的,这个群包含齐性 Lorentz 群以及时空平移;这就是 Poincaré 群。没有人觉得这令人兴奋,因为在牛顿时代,人们就知道平移下的不变性。不过,我们还是有机会考虑这个更大的群。它的元素由 Lorentz 变换 Λ 和 4 向量 a 标记。它们通过 Lorentz 变换和 a 的平移作用于时空点。

积分、微分和特殊函数的记号

基本微分算符记为 ∂_μ , 定义为

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (1.19)$$

它是作用于空间和时间的函数。请注意,我在书写算符时使用的是下指标,而在书写 x^μ 时使用的是上指标。这是正确的。算符 ∂_μ 并不像一个逆变矢量 a^μ 那样变换,而是像一个协变矢量 a_μ 那样变换。记住这一点的简单方法是观察

$$\partial_\nu x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (1.20)$$

根据定义。如果我们用下指标来同时写算符和坐标,那么右边就应该是 g 而不是 δ 。与 Laplace 算符 ∇^2 几乎同样重要的是 **d'Alembert 算符 (d'Alembert operator)** \square^2 , 我们将把它写成 \square^2 ,

$$\square^2 \equiv \partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = (\partial^0)^2 - \nabla^2 \quad (1.21)$$

这是一个 Lorentz 不变微分算符。⁵

现在来谈谈积分。当我不对积分设置任何上限或下限时,我的意思是积分要从 $-\infty$ 到 ∞ 。尤其是对 4 向量 a^μ 的分量进行四维积分;

$$\int d^4 a \equiv \int_{-\infty}^{\infty} da^0 \int_{-\infty}^{\infty} da^1 \int_{-\infty}^{\infty} da^2 \int_{-\infty}^{\infty} da^3 \quad (1.22)$$

超过一个变量的 delta 函数在三维空间中将写成 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$, 在四维空间中将写成 $\delta^{(4)}(x)$ 。如果我们将函数 $F(x)$ 的 Fourier 变换 $\tilde{F}(k)$ 定义为

$$\tilde{F}(k) \equiv \int d^4 x F(x) e^{ik \cdot x} \quad (1.23)$$

其中, k 和 x 都是 4 向量, 则

$$F(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{F}(k) e^{-ik \cdot x} \quad (1.24)$$

⁵[编者注] 许多作者将 \square 写为 d'Alembert 算符, 而不是 \square^2 。Coleman 用 \square^2 , 也就是这里用的。

我将尝试采用如下一个约定，即每个 dk (或 dp) 的分母都是 2π 。不幸的是，这将导致我在中间阶段写下 2π 的平方根。但我会巧妙地安排一下，到最后 dk 的所有因数的分母都是 2π ，而 2π 不会来自其它地方。这一点很重要。有时我们会马虎，表现得好像 $1 = -1 = 2\pi$ 和 $1/(2\pi) = \bar{1} = \text{“1-bar”}$ 或什么的。好吧，假设你从一个美丽的理论中预言了一个结果。有人问你这个结果是否可以测量，而你说，是的。如果他们花了一百五十万去测量，却因为你在分子里放了一个本该放在分母里的 $(2\pi)^2$ 而找不到结果，你会觉得自己很傻……

最后还有一个我偶尔会用到的函数， $\theta(x)$ ，即 theta 函数⁶。theta 函数的定义为

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x > 0 \\ 0 & \text{如果 } x < 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

该函数在跳变处 $x = 0$ 的值与在我们使用该函数的每一个地方都是无关的。theta 函数的导数就是 delta 函数：

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x) \quad (1.26)$$

现在，我们准备研究相对论量子系统的第一个例子。

1.2 质量为 μ 的单个自由无自旋粒子的理论

无自旋粒子的状态完全由其动量决定，而动量的分量构成了对易变量的一组完备集：⁷

$$\mathbf{P}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle \quad (1.27)$$

状态的标准条件条件是

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (1.28)$$

这些右矢 $|\mathbf{p}\rangle$ 构成了状态的一个完备集，并且不存在其它状态，这一说法可以写成

$$1 = \int d^3\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| \quad (1.29)$$

因此，任何状态 $|\psi\rangle$ 都可以用它们来展开：

$$|\psi\rangle = \int d^3\mathbf{p} \psi(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle \quad \text{其中 } \psi(\mathbf{p}) \equiv \langle \mathbf{p} | \psi \rangle \quad (1.30)$$

⁶[编者注] 也记为 $H(x)$ ，经常被称为 Heaviside 阶跃函数，以纪念广泛使用它的 Oliver Heaviside (1850-1925)。见 H. Jeffreys, Operational Methods in Mathematical Physics, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics No.23, Cambridge U.P., 1927, 第 10 页。

⁷[编者注] 因为 $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ ，而在我们选择的单位制 $\hbar = 1$ 中，我们同样可以使用右矢 $|\mathbf{k}\rangle$ 和 \mathbf{k} 表示动量。

如果我们研究的是非相对论量子力学，我们在描述理论时会给出 Hamilton 量 H ，从而给出状态的时间演化； $H|\mathbf{p}\rangle = (|\mathbf{p}|^2/2\mu)|\mathbf{p}\rangle$ 。

对于相对论量子力学，我们则取

$$H|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}|\mathbf{p}\rangle \equiv \omega_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle \quad (1.31)$$

就是这样，单个自由、无自旋粒子的理论被相对论化了。

我们怎么知道这个理论是 Lorentz 不变的呢？仅仅因为它包含一个相对论公式，并不一定意味着它是相对论性的。该理论并不明显具有 Lorentz 不变性。但是，该理论具有明显的平移不变性和旋转不变性。让我们更精确地说明这一点。

平移不变性

对于任何由给定 4 向量 a^μ 指定的主动平移，都应该有一个满足这些条件的线性算符 $U(a)$ ：

$$U(a)U(a)^\dagger = 1, \quad \text{来保持概率振幅} \quad (1.32)$$

$$U(0) = 1 \quad (1.33)$$

$$U(a)U(b) = U(a+b) \quad (1.34)$$

满足这些条件的算符 U 是 $U(a) = e^{iP \cdot a}$ ，其中 $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ 。

题外话：我是按照教学顺序而不是逻辑顺序来编排这些材料的。逻辑顺序应该是：

1. 我们想建立一个无自旋粒子的平移不变理论。该理论将包含么正平移算符 $U(\mathbf{a})$ 。

2. 定义 P^i 为

$$P^i = i \left. \frac{\partial U(\mathbf{a})}{\partial a^i} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}} \quad (1.35)$$

由 (1.34) 可知， $[P_i, P_j] = 0$ ；由 (1.32) 可知， $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\dagger$ 。

3. 声明 P^i 是一个完备集，并按动量对状态进行分类。

4. 定义 $H = \sqrt{|\mathbf{P}|^2 + \mu^2}$ ，并因此给出时间演化。

继续按教学顺序进行：

由右矢描述的状态通过 $U(a) = e^{iP \cdot a}$ 进行如下转换：

$$U(a)|0\rangle = |a\rangle \quad (1.36)$$

其中, $|x\rangle$ 是指中心在 x^μ 的一个状态; $|0\rangle$ 是指中心在原点的一个状态。算符 O 变换如下

$$O(x+a) = U(a)O(x)U(a)^\dagger \quad (1.37)$$

而期望值变换如下

$$\langle a|O(x+a)|a\rangle = \langle 0|O(x)|0\rangle \quad (1.38)$$

缩减变换为空间平移,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{a}) &= e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} \\ e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}|\mathbf{q}\rangle &= |\mathbf{q}+\mathbf{a}\rangle \\ e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}O(\mathbf{x})e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} &= O(\mathbf{x}+\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

只有局域在空间中的算符才根据这一规则进行变换。位置算符 $\hat{\mathbf{q}}$ 不满足:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}|\mathbf{q}\rangle &= (\mathbf{q}+\mathbf{a})|\mathbf{q}+\mathbf{a}\rangle \\ e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}\hat{\mathbf{q}}e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}|\mathbf{q}\rangle &= (\mathbf{q}+\mathbf{a})|\mathbf{q}\rangle \\ \Rightarrow e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}\hat{\mathbf{q}}e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} &= \hat{\mathbf{q}}+\mathbf{a} \end{aligned} \quad (1.40)$$

这看起来与上面 (1.39) 给出的算符变换规则相反。算符 $\hat{\mathbf{q}}$ 并不是局域在 \mathbf{q} 的算符, 所以最后两个等式没有理由看起来一样。

旋转不变性

给定一个旋转 $R \in \text{SO}(3)$, 应该有一个么正算符 $U(R)$ 满足下面条件:

$$U(R)U(R)^\dagger = 1 \quad (1.41)$$

$$U(1) = 1 \quad (1.42)$$

$$U(R_1)U(R_2) = U(R_1R_2) \quad (1.43)$$

记一个变换后的右矢为 $|\psi'\rangle = U(R)|\psi\rangle$, 并要求对任意 $|\psi\rangle$ 的规则是

$$\langle\psi'|\mathbf{P}|\psi'\rangle = R\langle\psi|\mathbf{P}|\psi\rangle \quad (1.44)$$

所以我们得到

$$U(R)^\dagger\mathbf{P}U(R) = R\mathbf{P} \quad (1.45)$$

$$U(R)^\dagger HU(R) = H \quad (1.46)$$

一个满足所有这些性质的 $U(R)$ 由下式给出

$$U(R)|\mathbf{p}\rangle = |R\mathbf{p}\rangle \quad (1.47)$$

满足 (1.42) 和 (1.43) 是平凡的。要证明 (1.41)，在 U 和 U^\dagger 之间插入一个完备集：

$$\begin{aligned} U(R)U(R)^\dagger &= U(R) \left[\int d^3\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| \right] U(R)^\dagger = \int d^3\mathbf{p} (U|\mathbf{p}\rangle) (\langle\mathbf{p}|U^\dagger) \\ &= \int d^3\mathbf{p} |R\mathbf{p}\rangle\langle R\mathbf{p}| \end{aligned} \quad (1.48)$$

令 $\mathbf{p}' = R\mathbf{p}$ ；Jacobi 行列式为 1，所以 $d^3\mathbf{p}' = d^3\mathbf{p}$ ，并且

$$U(R)U(R)^\dagger = \int d^3\mathbf{p} |R\mathbf{p}\rangle\langle R\mathbf{p}| = \int d^3\mathbf{p}' |\mathbf{p}'\rangle\langle\mathbf{p}'| = 1 \quad (1.49)$$

为了证明 (1.45)，写

$$\begin{aligned} U(R)^\dagger \mathbf{P} U(R) &= U(R)^{-1} \mathbf{P} (U(R)^{-1})^\dagger && \text{通过 (1.41)} \\ &= U(R^{-1}) \mathbf{P} U(R^{-1})^\dagger && \text{通过 (1.42) 和 (1.43)} \\ &= U(R^{-1}) \mathbf{P} \int d^3\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| U(R^{-1})^\dagger \\ &= U(R^{-1}) \int d^3\mathbf{p} \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| U(R^{-1})^\dagger \\ &= \int d^3\mathbf{p} \mathbf{p} |R^{-1}\mathbf{p}\rangle\langle R^{-1}\mathbf{p}| && (\text{令 } \mathbf{p} = R\mathbf{p}'; d^3\mathbf{p} = d^3\mathbf{p}') \\ &= \int d^3\mathbf{p}' R\mathbf{p}' |\mathbf{p}'\rangle\langle\mathbf{p}'| \\ &= R\mathbf{P} \end{aligned} \quad (1.50)$$

(1.46) 的证明留给你。

构造 Lorentz 不变右矢

我们对旋转的研究为研究 Lorentz 不变性提供了一个模板。假设一位愚蠢的物理学家把右矢 $|\mathbf{p}\rangle_S$ 定义为归一化三动量态，其公式为

$$|\mathbf{p}\rangle_S = \sqrt{1+p_z^2} |\mathbf{p}\rangle \quad (1.51)$$

这些右矢通过下面的条件归一化

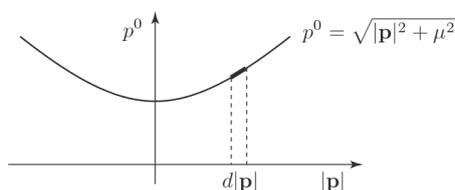
$${}_S\langle\mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle_S = (1+p_z^2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \quad (1.52)$$

完备性关系为

$$1 = \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{1+p_z^2} |\mathbf{p}\rangle_S {}_S\langle\mathbf{p}| \quad (1.53)$$

如果我们愚蠢的物理学家现在认为 $U_S(R)|\mathbf{p}\rangle_S = |R\mathbf{p}\rangle_S$ ，那么他对 (1.41)、(1.45) 和 (1.46) 的证明就会失败，因为

$$d^3\mathbf{p} \frac{1}{1+p_z^2} \neq d^3\mathbf{p}' \frac{1}{1+p_z'^2} \quad \text{i.e., } d^3\mathbf{p} \frac{1}{1+p_z^2} \text{ 不是旋转不变测度。} \quad (1.54)$$

图 1.1: 限制 $d\mathbf{p}$ 到不变双曲面 $p^2 = \mu^2$

让我们学以致用。对于 Lorentz 不变性来说，通常的 3 空间归一化 $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ 是一个愚蠢的归一化； $d^3\mathbf{p}$ 并不是一个 Lorentz 不变测度。我们想要的是双曲面 $p^2 = (p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 = \mu^2$ $p^0 > 0$ 上的 Lorentz 不变测度。测度 d^4p 是 Lorentz 不变的。为了把它限制在双曲面上，可以给它乘以 Lorentz 不变因子 $\delta(p^2 - \mu^2)\theta(p^0)$ 。这就得到了我们在双曲面⁸上的相对论测度

$$\int_{p^0=-\infty}^{\infty} d^4p \{d^3\mathbf{p} \delta(p^2 - \mu^2)\theta(p^0)\} = \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \quad (1.55)$$

其中

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}, \quad p^\mu = (\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \quad (1.56)$$

稍后，我们会希望 Feynman 图中的 2π 因子是正确的，因此我们会将相对论归一化的右矢 $|p\rangle$ 写成

$$|p\rangle = \sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle \quad (1.57)$$

使得

$$1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - \mu^2)\theta(p^0) |p\rangle \langle p| = \int d^3\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| \quad (1.58)$$

从双曲线的图像来看，乘以 $d^3\mathbf{p}$ 的因子应该随着 $|\mathbf{p}|$ 的增大而增大。这是一种错觉，是在 Euclid 纸上作图造成的。这与双生子佯谬中出现的错觉是一样的：虽然移动的孪生弟弟的路径看起来更长，但实际上孪生弟弟的固有时却更短。

现在让我们来证明 Lorentz 不变性。给定任意 Lorentz 变换 Λ ，定义

$$U(\Lambda) |p\rangle = |\Lambda p\rangle \quad (1.59)$$

⁸[编者注] 等号来自于恒等式 $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-a_i)}{|f'(a_i)|}$ ，其中 $\{a_i\}$ 是 $f(x)$ 的零点。则

$$\delta(p^2 - \mu^2) = \delta((p^0)^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2) = \frac{\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}} + \frac{\delta(p^0 + \omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}}$$

因子 $\theta(p^0)$ 消去了第二个 delta 函数，而对 p^0 进行积分只给出因子 $(2\omega_{\mathbf{p}})^{-1}$ ，乘以剩余 $d^3\mathbf{p}$ 。类似地，我们可以证明 $d^3\mathbf{x} \delta(|\mathbf{x}|^2 - R^2) = \frac{1}{2} R \sin \theta d\theta d\phi$ 。

么正算符 $U(\Lambda)$ 满足下面这些条件:

$$U(\Lambda)U(\Lambda)^\dagger = 1 \quad (1.60)$$

$$U(1) = 1 \quad (1.61)$$

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = U(\Lambda_1\Lambda_2) \quad (1.62)$$

$$U(\Lambda)^\dagger P U(\Lambda) = \Lambda P \quad (1.63)$$

这些条件的证明与旋转不变的完全一样, 运用完备性关系

$$1 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} |p\rangle\langle p| \quad (1.64)$$

和测度不变性,

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} = \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}'}} \quad (1.65)$$

1.3 位置算符 X 的确定

我们有一个相当完整的理论, 只是我们不知道任何东西在哪里; 一个粒子可能在原点, 也可能在仙女座星系。在非相对论量子力学中, 如果粒子处于位置算符 X 的特征状态, 那么它的位置 x 就是它的特征值。我们能否为我们的系统构建一个位置算符 X ? 幸运的是, 我们可以写下关于这种算符的一些一般条件, 我们认为这些条件是完全合理的, 足以唯一确定这个算符。⁹然后会有一个意想不到的事, 因为我们会发现这个唯一确定的算符完全不能令人满意! 这是有物理原因的。

我们希望我们的算符 X 满足什么条件? 这些条件不涉及 Lorentz 不变性, 而只涉及空间旋转和平移下的不变性:

$$X = X^\dagger \quad (1.66)$$

$$U(\mathbf{a})^\dagger X U(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} X e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} = X + \mathbf{a} \quad (1.67)$$

$$U(R)^\dagger X U(R) = R X \quad (1.68)$$

我们规定第一个条件是因为 x 是一个可观测量。第二个条件是规则 (1.40)。第三个条件是说 X 像 3 向量一样变换, 所以我们不妨把它写成 \mathbf{X} 或把它的分量写成 X^i 。然后, 在第二个条件中取 $\partial/\partial a_i$ 并在 $a_i = 0$ 处求值, 我们就得到了通常的对易关系 $i[P_i, X_j] = \delta_{ij}$ 。现在你看到了这个熟悉方程的新原点。

⁹[编者注] 见“Schrödinger’s Representation”, in P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th ed. revised, Oxford U.P., 1967。

根据对易关系，我们可以推导出有关 X^i 的一些信息；

$$X^i = i \frac{\partial}{\partial p_i} + R^i \quad (1.69)$$

其中， R^i 是余项，必须与 P^j 对易才能得到正确的结果。我们知道 X^i 的表达式具有正确的对易关系。现在求 R^i 。

我们对我们的系统有所了解。我们知道 P^i 的三个分量是对易算符的一个完备集。从非相对论量子力学，我们知道任何与对易算符的一个完备集对易的东西都必须都是这些算符的函数。因此， R^i 必须是 P^i 的某个函数。根据第三个条件 (1.68)， X^i 必须像 3 向量一样变换， R^i 也必须如此。这就告诉我们， R^i 的形式必须是

$$R^i = p^i F(|\mathbf{p}|^2) \quad (1.70)$$

其中， $F(|\mathbf{p}|^2)$ 是 $|\mathbf{p}|^2$ 的未知函数。但任何这种形式的函数都是某个标量函数 $G(|\mathbf{p}|^2)$ 的梯度，即

$$p^i F(|\mathbf{p}|^2) = \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i} \quad (1.71)$$

这确定了位置算符为

$$X^i = i \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i} \quad (1.72)$$

我们可以做得更多。我们可以通过改变 P 状态的相位来完全消除余项：

$$|\mathbf{p}\rangle \rightarrow |\mathbf{p}\rangle_G = e^{iG(|\mathbf{p}|^2)} |\mathbf{p}\rangle \quad (1.73)$$

我完全可以进行这种重新分配。这并不影响这些状态的物理特性。它们仍然是特征值为 p_i 的 P_i 的特征态，它们仍然是特征值为 $\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$ 的 H 的特征态，它们仍然以同样的方式被归一化。这是一种么正变换，称之为 $U(G)$ ：

$$|\mathbf{p}\rangle \rightarrow U(G)|\mathbf{p}\rangle \quad (1.74)$$

而算符也相应改变：

$$\mathbf{X} \rightarrow U(G)^\dagger \mathbf{X} U(G) = \mathbf{X}_G \quad (1.75)$$

在我们迄今为止所做的所有工作中，这一变换唯一影响的公式是 $|\mathbf{p}\rangle$ 上的 X^i 表达式。现在我们有

$$\begin{aligned} X_G^i |\mathbf{p}\rangle_G &= e^{-iG(|\mathbf{p}|^2)} \left(i \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i} \right) e^{iG(|\mathbf{p}|^2)} |\mathbf{p}\rangle_G \\ &= e^{-iG(|\mathbf{p}|^2)} e^{iG(|\mathbf{p}|^2)} \left(i \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i} - \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i} \right) |\mathbf{p}\rangle_G \\ &= i \frac{\partial}{\partial p_i} |\mathbf{p}\rangle_G \end{aligned} \quad (1.76)$$

因此, X^i 算子的唯一候选者——条件是我们适当地选择特征状态的相位——就是非相对论量子力学中的古典 X^i 算符, 即在 P 空间中算符为 $i\partial/\partial p_i$ 。让我们做出这样的选择, 并从现在起去掉 G 下标。

现在我们找到了 X^i 算符, 就知道粒子在哪里了。是这样吗? 让我们做一个思想实验。如果在相对论中, 我们真的有一个定义明确的位置算符, 那么我们应该可以说, 我们的粒子的速度不会超过光速。也就是说, 我们可以从粒子被急剧局域化的状态开始, 比如说在原点¹⁰, 让这个状态随时间演化 (根据 Schrödinger 方程, 因为我们知道 Hamilton 量), 然后看看在以后的某个时间里, 粒子的运动速度是否有非零的概率超过光速。我们拥有所有设备, 只需进行计算即可。让我们开始吧。

我们在时间 $t = 0$ 时局域在原点的状态 $|\psi\rangle$ 开始, 即

$$\langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (1.77)$$

由于 X^i 算符是通常的自己, 我们可以利用通常的关系¹¹

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.78)$$

所以在 $t = 0$

$$\langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \int \langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle d^3\mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \int \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \quad (1.79)$$

我们希望计算出粒子在时间 t 时位于位置 \mathbf{x} 的概率振幅, 根据量子力学的一般规则, 该概率振幅的计算公式为

$$\langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \psi \rangle \quad (1.80)$$

算符 X^i 和 P^j 是相同的, 只有 Hamilton 量是新的。因此, 我们可以进行计算, 只是把碎片拼在一起而已:

$$\langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \psi \rangle = \int d^3\mathbf{p} \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} \quad (1.81)$$

¹⁰通过平移不变性和叠加性, 我们可以很容易地从这个计算中得到任何位形演化。

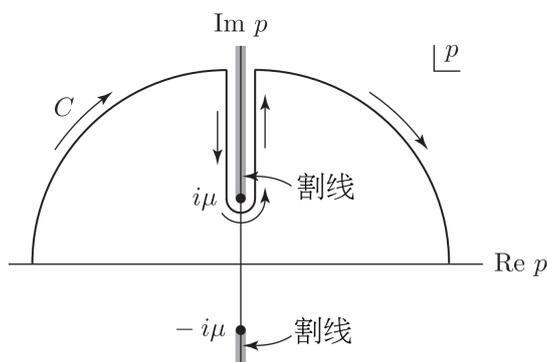
¹¹考虑 $\langle \mathbf{x} | X^i | \mathbf{p} \rangle$ 。如果让算符向左运算, 我们得到

$$\langle \mathbf{x} | X^i | \mathbf{p} \rangle = x^i \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle$$

但是是向右运算,

$$\langle \mathbf{x} | X^i | \mathbf{p} \rangle = i \frac{\partial}{\partial p_i} \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle$$

所以量 $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle$ 满足微分方程 $i\partial/\partial p_i \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = x^i \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle$ 。则 $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = C e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$, 其中 C 可能取决于 x (但不取决于 \mathbf{p})。通过考虑 $\langle \mathbf{x} | P^i | \mathbf{p} \rangle$, 你可以说明 C 是一个常数, 而为了方便我们设定 $C = 1/(2\pi)^{3/2}$ 。见 Dirac, 见前引, §23, “动量表示”。

图 1.2: 围道积分 $\int_{-\infty}^{\infty} dp p e^{ipr - i\omega_p t}$

因为 $H|\mathbf{p}\rangle = \omega_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle$, 且所以 $\langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{p} \rangle = e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} / (2\pi)^{3/2}$ 。通过极坐标, 用通常的方法计算积分,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} &= \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} e^{-i\omega_p t} \int_0^{\pi} e^{ipr \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dp p e^{-i\omega_p t} \frac{(e^{ipr} - e^{-ipr})}{ir} \\ &= -i \frac{1}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dp p e^{ipr - i\omega_p t} \end{aligned} \quad (1.82)$$

(令 $r = |\mathbf{x}|, p = |\mathbf{p}|$ 和 $\omega_p = \sqrt{p^2 + \mu^2}$ 。) 这是一个混乱的积分, 充满了振荡。很难说它是否会在光锥外消失。请记住, 在我们选取的单位中, 光速是 1。由于我们开始在 $t = 0$ 时的 $r = 0$, 如果粒子的速度比光速快, 那么 $r > t$ 时的概率振幅将不为零。

为了计算积分, 我们将 p 扩展到复数域, 并令 $p \rightarrow z = x + iy$ 。我们将 x 轴作为围道 C 的一部分, 并在 x 轴上方或下方用一个大的半圆弧封闭围道。然而, 我们的积分并不是 p 的解析函数, 因为函数 $\omega_p = \sqrt{p^2 + \mu^2}$ 在 $p = \pm i\mu$ 处有分枝点, 因此也有连接这两点的割线。我选择把割线写成沿着正虚轴从 $+i\mu$ 向上延伸, 沿着负虚轴从 $-i\mu$ 向下延伸。如果我们扭曲半圆围道 C 以避免割线, 则在扭曲围道所限定的区域内, 积分是一个解析函数, 如下图所示。

由于积分在 C 内是解析的, 因此沿 C , 比如逆时针方向的积分为零。然后, 沿 x 轴的原始积分则等于相反意义上积分的剩余部分, 沿大弧线顺时针方向, 在割线左侧向下, 在右侧向上。沿着上割线, p 的参数为 iy 。 ω_p 的值穿

过这条割线上是不连续的；其值在割线两侧的值¹²

$$\omega_p = \begin{cases} i\sqrt{y^2 - \mu^2}, & x = 0+ \\ -i\sqrt{y^2 - \mu^2}, & x = 0- \end{cases} \quad (1.83)$$

沿着大弧， p 的参数为 $Re^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$ ，其中左侧弧上为 $\pi \geq \theta \geq \pi/2$ ，而右侧弧上为 $\pi/2 \geq \theta \geq 0$ 。由于 $r > t$ ，包括 $e^{ipr - i\omega_p t}$ 积分是有界的，其界为 $e^{-Rr \sin \theta}$ 。因此，在极限 $R \rightarrow \infty$ 中，大弧对积分没有任何贡献。同样，当小圆周的半径为零时，小圆弧也不会对积分有任何贡献。那么

$$\langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \psi \rangle = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \left[\int_{\infty}^{\mu} dy y e^{-ry - \sqrt{y^2 - \mu^2} t} + \int_{\mu}^{\infty} dy y e^{-ry + \sqrt{y^2 - \mu^2} t} \right] \quad (1.84)$$

虽然指数的 ω_p 部分在截断左侧受阻，但指数在右侧增加。然而，由于 $r > t$ ，指数的严格阻尼部分，即 $-ry$ ，比增加部分 $+\sqrt{y^2 - \mu^2} t$ 占主导。改变第一项中的极限值可以得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \psi \rangle &= \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{\mu}^{\infty} dy y e^{-ry} \left[e^{\sqrt{y^2 - \mu^2} t} - e^{-\sqrt{y^2 - \mu^2} t} \right] \\ &= \frac{i}{2\pi^2 r} \int_{\mu}^{\infty} dy y e^{-ry} \sinh \left(\sqrt{y^2 - \mu^2} t \right) \end{aligned} \quad (1.85)$$

这是一个坏消息，孩子们，因为这个积分是正项的乘积。因此，积分不为零，而我们的粒子在以比光速更快的速度运动时，总是具有不确定的非零概率振幅。因此，粒子可以以比光速更快的速度运动，从而在时间上倒退，并带来所有相关的悖论。我希望你能理解这句话的泰坦尼克含义。

然而，事情并不像你想象的那么糟糕。粒子以比光速更快的速度飞行的概率并不大。不可能进行积分，这意味着答案是 Bessel 函数。¹³但只保留 \sinh 的指数递增部分，然后用 y 代替 $\sqrt{y^2 - \mu^2}$ 来约束积分是很简单的。这将给我们一个高估值。则我们有

$$\langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \psi \rangle < i \frac{1}{2\pi^2 r} \int_{\mu}^{\infty} dy y e^{-(r-t)y} = e^{-(r-t)\mu} \left(\frac{1}{(r-t)^2} + \frac{\mu}{(r-t)} \right) \quad (1.86)$$

当你离光锥越远时，粒子在前向光锥外被发现的几率就会呈指数级下降。因此，举例来说，我回到过去说服我母亲堕胎的可能性极小。但是，即使有可

¹²[编者注] 细节，见 Mathematics for Physicists, Phillipe Dennerly 和 André Krzywicki, Harper and Row, 1967, republished by Dover Publications, 1996 的第 71-73 页的例子或者 Complex Variables and Applications, Ruel V. Churchill and James Ward Brown, McGraw-Hill, 1974 的第 202-205 页的第七章例 2。

¹³Coleman 在开玩笑。Mathematica 无法找到这个积分的封闭形式，因此它并不是一个真正的 Bessel 函数。

能，如果你是一个纯粹主义者，这仍然是不可接受的。如果你是一个纯粹主义者，我们定义的 X^i 算符就绝对是腐朽的、不好的，应该被抛弃。如果你是个懒人，那就没那么糟糕了，因为在前向光锥之外发现粒子的振幅相当小。它是指数阻尼的，如果我们离开光锥几个 $1/\mu$ 的因子，也就是粒子的几个 Compton 波长，振幅就会下降很多。

我们发现，我们无法精确确定粒子的位置。但如果我们只关心找到粒子自身 Compton 波长的几个波长以内，实际上情况并没有那么糟糕。原则上，无法定位单个粒子是一场灾难。自然界是如何摆脱这场灾难的呢？有逃脱的物理基础吗？是的，有。

假设我试图用 Niels Bohr 的传统理想实验方法来定位一个粒子。（事实上，这个论点是 Niels Bohr 提出的。¹⁴）我造了一个边可以移动的不透水的盒子。我把粒子放进去。我转动曲柄，就像西班牙宗教裁判所那样，盒子的两侧就会向下挤压。看来我可以随心所欲地将粒子定位。出了什么问题？相对论和这有什么关系？

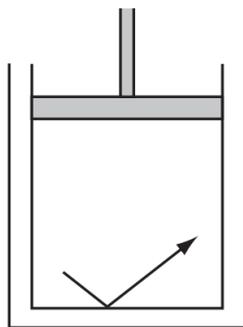


图 1.3: 粒子在带活动墙盒子里

问题是这样的。如果我试图把粒子定位在一个维度为 L 的空间内，这个维度与粒子自身的 Compton 波长 ($L \sim \mathcal{O}(1/\mu)$) 的数量级相同，那么起作用的就不是相对论，而是我们可靠的老朋友不确定性原理，它告诉我们

$$\Delta p \gtrsim \mathcal{O}(\mu). \quad (1.87)$$

如果 p 的色散是 μ 的数量级，那么 p 本身也必须至少是 μ 的数量级。那么我们就有足够的能量在盒子里产生成对粒子。与《Ouroboros 之虫》一样，¹⁵本节也是以成双成对结束的。如果我们把粒子挤压得越来越小，那么动量

¹⁴[编者注]N. Bohr and L. Rosenfeld, “Field and Charge Measurements in Quantum Electrodynamics”, Phys. Rev. 78 (1950) 794–798.

¹⁵[编者注]《Ouroboros 之虫》是 E. R. Eddison 的奇幻小说，出版于 1922 年；J. R. R. Tolkien 曾是

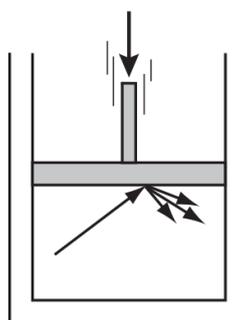


图 1.4: 挤在盒子里的粒子

的不确定性一定会越来越大。如果我们的动量有很大的不确定性，那么盒子内就一定会有很大的能量。如果盒子里有很大的能量，我们就知道盒子里有东西，但我们不知道那是一个粒子。它可能是三个粒子，或者五个，或者七个。这个故事的寓意是，在单粒子理论中，我们无法令人满意地定位粒子。

因此，我们可以定位某些东西，但我们定位的并不是单个粒子。由于成对产生的现象，不仅动量与位置互补，粒子数也与位置互补。如果我们对位置进行了非常精确的测量，我们的动量就会有非常大的偏差，因此，由于发生了成对产生，我们不知道我们有多少粒子。相对论因果关系与单粒子量子理论是不一致的。现实世界通过成对产生来回避这一矛盾。这就是我们刚刚经历的数学的物理原因。这就引出了我们的下一个话题，关于多自由粒子的讨论。

其崇拜者。Ouroboros (希腊语 $\alpha\upsilon\omicron\rho\upsilon\beta\omicron\rho\omicron\varsigma$, "尾巴" + $\beta\omicron\rho\omicron\varsigma$, "吞噬") 是蛇或龙吃掉自己尾巴的形象。它起源于古埃及，通过希腊进入西方传统，在中世纪与欧洲炼金术联系在一起。它常被用作死亡与重生永恒循环的象征。参见《A Dictionary of Symbols》, J. E. Cirlot, Dover Publications, 2002, 第 15、48、87、246-247 页。德国化学家 August Kekulé 报告说，梦见衔尾蛇让他提出了苯环的结构：O. Theodor Benfey 译，"August Kekulé and the Birth of the Structural Theory of Chemistry in 1858", J. Chem. Ed. 35 (1958) 21-23。

第二章 最简单的多粒子理论

在上一节中，我们研究了单个相对论性无自旋粒子的理论。我们发现了一些对本课程剩余部分有用的东西，比如粒子的 Lorentz 变换特性，也发现了一些只能走入死胡同的东西，比如我们无法定义一个令人满意的 X^i 算符。当我们试图定位粒子时，发现粒子的运动速度超过了光速。在课程的最后，我指出可以从另一个角度来解决粒子定位的问题。我们不能停留在单一粒子的理论上，而是可以想象一个理想化的现实世界的例子，在这个例子中会发生成对粒子的产生。我们发现，我们无法将粒子定位在一个盒子里。如果盒子太小，里面就不是一个粒子，而是成对的粒子。这促使我们研究一个稍微复杂一点的系统，一个由任意数量的自由无自旋相对论粒子组成的系统。对这个系统的研究将占据本节的全部内容。局域化问题应该在我们的脑海中浮现，但我不会对此多说什么。

2.1 描述多粒子状态的第一步

一般的议题被称为 **Fock 空间 (Fock space)**。¹这是 Hilbert 空间的名称，也就是描述我们将要讨论的系统的状态空间。我们会发现，当我们第一次写下 Fock 空间时，会觉得非常难看和别扭。我们需要做大量的工作来找到一种高效的簿记算法，使我们能够在不发疯的情况下操作 Fock 空间。簿记将通过称为湮灭和产生算符的代数对象来管理，你可能在之前的量子力学课程中熟悉这些算符。

我在这里要介绍的装置——尽管我们将把它们专门用于相对论量子力学——并不完全适用于相对论量子力学。在多体理论和统计力学中，经常存在粒子数量不固定的系统。在统计物理学中，我们经常希望考虑所谓的巨正则系综，在这种系综中，我们对不同粒子数量的状态进行平均，粒子数量围绕化学势决定的数值波动。在固体物理学中，固体中通常有很多电子，但我们通常只对那些把头伸到 Fermi 海以上的电子——传导电子——感兴趣。这些

¹[编者注]V. Fock, “Konfigurationsraum und zweite Quantelung” (位形空间和二次量子化), Zeits. f. Phys. **75** (1932) 622–627.

电子的数量会随着电子进出 Fermi 海而发生变化。因此，这些方法具有更广泛的适用性。为了保持清晰，我将使用我们的非相对论状态归一化和非相对论记号，只是在最后我们要讨论 Lorentz 变换性质时才切换到相对论。

让我提醒你一下我们之前用过的非相对论单粒子状态的 Hilbert 空间：由基向量 \mathbf{p} 标注的动量右矢 $|\mathbf{p}\rangle$ ，并用 delta 函数归一化，

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (2.1)$$

这是平面波的标准。这些是 Hamilton 量 H 的同时特征状态，其特征值为 $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$ （但这在这里并不重要），以及动量算符 \mathbf{P} 的同时特征状态，其特征值为 \mathbf{p} ；

$$H|\mathbf{p}\rangle = \omega_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle \quad \mathbf{P}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle \quad (2.2)$$

当然，它们还具有定义明确的 Lorentz 变换特性，这一点我们上次已经讲过，但我暂时不打算重点讨论。在上一节中，这是我们 Hilbert 空间的一套完整的基向量；一般状态就是这些状态的线性组合。但现在我们追求的是一个更大的 Hilbert 空间，所以这些只是基向量的一个子集。我把它们称为“单粒子基向量”。我们要考虑的情况是，我们观察世界时，也许会在其中发现一个粒子，但也许会发现两个、三个或四个粒子，也许会发现这些情况的线性组合。因此，我们需要更多的基向量。我们尤其需要双粒子基向量。我将写下它们的构造，然后再写下其余的”等等”（三粒子状态、四粒子状态……）。

双粒子态描述了两个独立的粒子，将用这两个粒子的动量来标注，我称之为 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_2 ，它们可以是任意两个 3-向量。（不要混淆这些下标——矢量指标和粒子的指标标记）。我们将假定我们的无自旋粒子是相同的 Bose 子，因此为了纳入 Bose²统计，我们标记状态为 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$ ，这实际上 $|\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\rangle$ 标记的是相同状态。至于是第一个粒子有第一个动量，第二个粒子有另一个动量，还是相反，这并不重要。我们将用传统的 delta 函数归一化再次对状态进行归一化：

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1) \quad (2.3)$$

状态是正交的，除非所涉及的两个动量相等，要么是一个排列，要么是另一个排列。我们必须同时包含这两个项，否则就会与单粒子的归一化方程产生矛盾。这些状态是 Hamilton 量的特征态，它们的能量当然是与两个单独粒子相关的能量之和，它们也是动量算符的特征态，它们的动量是两个单独粒子的两个动量之和：

$$H|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = (\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2})|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle \quad \mathbf{P}|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle \quad (2.4)$$

²最近，一位来自印度次大陆的同事告诉我，这个名字应该读作“Bōsh”，我会努力训练自己正确发音。但 Bose 子还是“bōsāns”。

扩展到三个粒子只是“等等 (*et cetera*)”。当然，“等等 (*et cetera*)”是故事的结尾，但我们还没有真正开始故事的开头。我们还遗漏了一件事。我们在观察世界时，有可能发现世界上并不存在粒子。因此，我们需要在这个无限弦上添加至少一个基向量，也就是一个无粒子基向量，一个单一的状态，以考虑根本不存在粒子的可能性。我们将这个状态命名为 $|0\rangle$ 。它被称为**真空态 (vacuum state)**。我们将假设真空状态是唯一的。这个状态 $|0\rangle$ 当然是能量的特征状态，特征值为零，同时也是动量的特征状态，特征值为零：

$$H|0\rangle = 0 \quad \mathbf{P}|0\rangle = 0 \quad (2.5)$$

真空状态是 Lorentz 不变的， $U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$ 。所有观测者都同意，没有粒子的状态就是没有粒子的状态。我们将其归一化为 1，

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (2.6)$$

这种归一化对于 Hamilton 量的分立特征态来说是常规的，它不是连续体的一部分。请不要把真空态与 Hilbert 空间中的零矢量混为一谈，零矢量根本不是态，它的概率为零；也不要把真空态与具有 3-动量 \mathbf{p} 等于零的单粒子的态，即 $|\mathbf{0}\rangle$ 混为一谈。这个右矢用向量 $\mathbf{0}$ 表示。

现在我们有了基向量一个完备范畴。Fock 空间中的一般状态 $|\Psi\rangle$ 将是这些基向量的线性组合：

$$|\Psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \int \psi_1(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle d^3\mathbf{p} + \frac{1}{2!} \int \psi_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 + \dots \quad (2.7)$$

这是某个数字，某个概率振幅乘以无粒子状态，真空，再加上某个函数 $\psi_1(\mathbf{p})$ 乘以右矢 $|\mathbf{p}\rangle$ 的积分，再加上超过 2 的 $1!$ 按照惯例插入——我会解释这个惯例的原因——乘以两个时刻的函数对两个时刻的积分乘以两粒子 ket，用点表示三粒子、四粒子等状态，一直这样下去。