“量子化是个谜” *

Ivan Todorov 著，梁旭民译

2026 年 1 月 28 日

摘要

本文是一个说明性笔记，结合了量子物理学发展史和量子化理论中特定数学主题的回顾（针对并非完全不懂量子力学的学生）。

我们在引言中回顾了量子革命的早期阶段，并在第 2.1 节中重述了一些辛几何的基本概念，然后在第 2.2 节中概览了所谓的预量子化 *(prequantization)*，从而为第 2.3 节概述几何量子化 *(geometric quantization)* 奠定了基础。在第 3 节中，我们应用一般理论研究 *Kähler* 流形量子化 *(quantization of Kähler manifold)* 的基本例子。在第 4 节中，我们回顾了 Weyl 和 Wigner 映射，以及为相空间中量子力学 *(quantum mechanics in phase space)* 奠定基础的 Groenewold 和 Moyal 的工作，最后简要回顾了形变量子化 *(deformation quantization)* 的现代发展。第 5 节回顾了二次量子化及其数学解释。我们指出，处理（非相对论）束缚态需要超越二次量子化概念的数学形式化。附录中专门介绍了 Pascual Jordan，他是量子力学创建者中最不为人所知的一位，也是” 量子化物质波理论” 的主要设计师。

*Edward Nelson 的一句名言的第一部分，以 “但是二次量子化是一个函子” 结尾。引用 John Baez[B06] 的话说: “除非能解释这句话，否则没有人是真正的数学物理学家。” *Bulg. J. Phys.* **39** (2012) 107-149; Bures-sur-Yvette preprint IHES/P/12/01.

目录

1 引言：历史评述

近一个世纪以来，新旧量子力学一直是一门活跃的学科。即使我们只计算教科书的数目，其数量也是巨大的，而且还在不断增长。我最喜欢的是 Dirac 的 [D30]。这些笔记面向对这一主题的历史及其数学基础有兴趣的读者。John von Neumann 的 [vN] 是关于量子力学数学意义的早期专著。至于更近期的著作，请参见 [FY, Mac, T] 以及其他许多著作。后一本书还包含精选书目。有关该主题历史的资料包括：[MR, Dar, Sch, PJ07]。

1.1 量子革命的第一步

量子理论需要一个新的概念基础。19 世纪之交，人们逐渐认识到经典力学和电动力学在原子现象领域的不足，因此有理由对非常成功的经典力学和电动力学进行如此巨大的变革。四项理论突破为量子力学的诞生做好了准备。

1900: Max Planck（1858-1947 年）紧跟柏林的 Rubens-Kurlbaum 实验，找到了黑体辐射的光谱密度 $\rho(\nu,T)$ 的公式。作为频率 ν 和绝对温度 T 的函数的黑体辐射光谱密度公式：

$$\rho(\nu,T)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\beta h\nu}-1}\,,\quad \beta=\frac{1}{kT}\,. \tag{1.1}$$

这里 k 是 Boltzmann[1]常数，h 是 *Planck 常数 (Planck constant)* 表示*作用量子 (quantum of action)* (这也是本文回顾所有四项突破的标志)。从经验中发现这样一个公式看起来就像是一个奇迹。在发现这个公式的时候，似乎没有人意识到它与著名的 Bernoulli[2]数生成函数密切相关，而最近又发现与模形式密切相关（基于共形紧致空间上的自由无质量量子场理论的推导强调了与模形式的关系，见 [NT]；它还与指标定理和号差定理有关，见 [H71] 第二节）。Planck 并没有止步于此。他找到了其有效性的前置要求（虽然在当时听起来很疯狂）。首先，他假设能量由有限元素组成，*量子 (quanta)* 与光波的频率 ν 成正比 $\epsilon=h\nu$。其次，他认识到量子应该是*不可区分的 (indistinguishable)* 的，从而预言了二十多年后发现的 *Bose-Einstein 统计 (Bose-Einstein statistics)*（见 [P] 第 19a 节）。这就是 Planck，一个天生保守的人，如何在 42 岁时开始了 20 世纪的科学革命。

1905: Albert Einstein (1879-1955 年) 是第一个认识到 Planck 工作的革命性特点的人。光量子是真实存在的：它可以把电子踢出金属表面，从而产生*光电效应 (photoelectric effect)*。1913 年，Planck 等人推荐 Einstein 为普鲁士科学院院士，他的以下评论可以判断爱因斯坦的大胆假设有多么超前："总之，...... 在现代物理学如此丰富的重大问题中，几乎没有一个问题是爱因斯坦没有做出卓越贡献的。他有时可能会偏离目标，例如在他的光量子假说中，但这并不能对他造成太大的影响......"（见 [P] 第 19f 节）。Robert Milikan (1868-1953 年) 在 1915 年证实了 Einstein 的预言（1923 年获得 Nobel 奖），但他自己却无法相信" 光的粒子"。即使在 Einstein 于 1921 年获得 Nobel 奖之后，" 特别是由于他在光电效应方面的工作"，主要物理学家[3]和 Slater 仍然对波粒二象性感到不安。

[1]Ludwig Boltzmann (1844-1906 年) 创立了热力学的统计解释，这种解释正是 Planck 最初试图克服的。以概率 $S=klogW$ 表示的熵的表达式被刻在 Boltzmann 在维也纳的墓碑上 (见 [Bl])。

[2]Jacob Bernoulli (1654-1705 年) 是 Basel 数学家大家族中的第一人。Bernoulli 数出现在他于 1713 年去世后出版的关于概率论的论文 *Ars Conjectandi* 中。

[3]像 Bohr，Kramers(荷兰物理学家 Hendrik Anthony (”Hans”) Kramers(1894-1952 年) 在 1916 年至 1926 年的近 10 年间，一直是 Niels Bohr(1885-1962 年) 在哥本哈根的高级合作者。)

1911-13: Ernest Rutherford (1871-1937 年) 于 1911 年建立了行星原子模型：轻质电子围绕一个紧凑、大质量、带正电荷的原子核运行，根据经典电动力学定律，这是一种极不稳定的结构。显然，原子物理学需要新的定律。Niels Bohr 在 1913 年意识到，原子的发射光谱和吸收光谱，即原子的指纹 [B05]，可以解释为静止状态之间的转换（1910 年，奥地利物理学家 Arthur Haas[4]在他的博士论文中提出了 Bohr 模型。他的结果最初在维也纳遭到嘲笑。1922 年，Bohr 因其原子模型获得了诺贝尔奖）并且还推导出了 Balmer 的氢原子光谱公式（见 [P86]9(e)）。用早期量子力学教科书《量子力学》（见 [D30]）中雄辩的语言来说："我们在这里看到了经典力学崩溃的一个非常突出和普遍的例子——不仅仅是它的运动定律不准确，而且它的概念也不足以为我们提供原子事件的描述。"

1923-24: 受光量子的波粒二象性的启发，Louis-Victor, de Broglie 王子 (1892-1987 年) 预言了所有粒子波的性质。他的预言在 1927 年被两个独立的电子衍射实验所证实。de Broglie 于 1929 年获得诺贝尔物理学奖。

1.2 光辉岁月：1925-1932

每当我们回顾 1925 年至 1930 年期间物理理论的发展，都会感受到奇迹般的喜悦和震撼。

——Rudolf Haag

量子力学以两种面貌出现：Werner Heisenberg (1901-1976 年) 和 Paul Dirac (1902-1984 年) 认为它是一种粒子理论，而 Louis de Broglie 和 Erwin Schrödinger (1887-1961 年) 则认为它是一种*波动力学* [Sch]。尽管 Schrödinger 已经认识到了它们之间的等价性，但只有变换理论提供了一个一般设定，使人们能够把相互竞争的方法看作是同一理论的不同表象/图景。它主要是由 Pascual Jordan 和 Dirac 发展起来的（见附录）。

1925 年 7 月，犹豫不决的 Heisenberg 把一篇突破性论文的手稿 "量子理论对运动学和力学关系的重新诠释"（英文译文及注释见 [SQM]）交给了他的哥廷根大学教授 Max Born(1882-1970 年)[5]，并动身前往莱顿和剑桥。Heisenberg 在论文的最后邀请大家 "对本文中肤浅使用的方法进行更深入的数学研究。" Born 很快意识到，Heisenberg 在不知不觉中处理的是矩阵乘法。他把自己的兴奋告诉了他的前助手 Wolfgang Pauli (1900-1958 年)，请他一起研究 Heisenberg 思想的合适的数学重述，但 Pauli 以他惯常的不敬风格回答说：" 是的，我知道，你喜欢繁琐复杂的形式主义。你只会用徒劳无益的数学来破坏 Heisenberg 的物理思想 (见 [Sch] 第 8 页)。只有 Born 做出了正确的选择，转向了 22 岁的 Jordan，正是 Jordan，按照他导师的想法，首次证明了现在称为 "Heisenberg 对易关系"，即：$2\pi i(pq - qp) = h$——并被刻在了 Born 的墓碑上。Dirac 在 1925 年独立发现了它，并将其与 Poisson[6]括号 $\{q, p\} = 1$ 联系起来。与他的朋友 Pauli 不同，Heisenberg 欢迎矩阵力学的 "器具" 发展。几十年后，他谈到了从揭示不可交换乘法的本质中得到的教训："如果我们在一个原本很有说服力的计算中发现了一个困难，我们不应该把这个困难推开，而是应该努力把它变成整个东西的中心。"（见 [MR]，3，III.1）在 Born-Jordan 的论文完成之前，他就开始参与这项工作–首先是从哥本哈根给 Jordan 写信。合作（Dreimännerarbeit——三个人的工作 [BHJ]）是富有成效的，尽管并不容易。Heisenberg 认为他们应该从物理上的有趣应用入手，而不是像 Born 和 Jordan 提议的那样，首先扩展"

[4]1884 年出生于布尔诺-1941 年去世于芝加哥

[5]在哥本哈根逗留了 7 个月后，当时他正在北海的一个小岛 Helgoland 上养病花粉热——见 [T05]。

[6]Siméon-Denis Poisson (1781-1840 年) 于 1811 年在他的 Traité de mécanique 引入动量 $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ 的概念，T 是动能。

器具“，包括电磁场理论。他坚持认为，他们只需为一个由 n 个自由度组成的系统假设正则对易关系（*canonical commutation relations*）（约化 Planck 常数 $\hbar$ 由 Dirac 在他的书 [D30] 中引入）：

$$i[p_j, q_k] = \hbar\delta_{jk} \quad (\hbar = \frac{h}{2\pi}), \quad [p_j, p_k] = 0 = [q_j, q_k], \quad j, k = 1, 2, ..., n, \tag{1.2}$$

而不是按照他的合作者的愿望，试图从 Hamilton 运动方程中推导出它们。时隔四分之一个世纪，Wigner[7]又回到了“运动方程是否决定量子力学对易关系”的问题上（Physics Review, 1950 年）。这个问题引发了 *para* 统计 *(parastatistics)* 的发现 (Green, Messiah, Greenberg) 及其超 lie 代数的推广（Palev）。最后一节专门讨论辐射理论，由 Jordan 独自完成（[MR] 3, IV.2）。它包含了对 Planck 黑体辐射公式的首次量子力学推导，这是一个属于量子电动力学领域的课题。几十年后的 1962 年，Jordan 在与 [SQM] 的编辑 Van der Waerden (1903-1995 年）交谈时说，这是他对量子力学最重要的贡献，但这一贡献一直不为人知，也未得到赏识。

1926 年 1 月 27 日，在 [BHJ] 问世的一周前，在一个令人振奋的假期之后，Schrödinger 提交了四篇系列论文中的第一篇，题为” 量子化作为一个本征值问题”。正因为他基于“波动方程”的波动力学表述看起来与 Heisenberg、Born、Jordan 和 Dirac 等人所描绘的图景大相径庭。但它拓宽了量子理论的范围，并使其最终变得更加灵活。

1.3 数学化理解的开始

数学家就像法国人：无论你告诉他们什么，他们都会翻译成自己的语言，然后就变成了完全不同的东西。

——J.W. Goethe (1749-1832)

在 Dirac 发现坐标和动量的对易括号与 Poisson 括号的简单关系

$$[q, p] = i\hbar\{q, p\} \ (= i\hbar), \tag{1.3}$$

之后，似乎可能为更一般的可观测量（即：相空间[8]上的实函数）假设一种类似的关系。这立刻导致了一个排序问题。简单的对易关系

$$\frac{1}{2}[q^2, p^2] = i\hbar(qp + pq) \tag{1.4}$$

建议使用适当对称的乘积[9]这样，就可以在 p 和 q 的二阶多项式中采用简单的量子化规则。对于一般的三次多项式，$f(p, q), g(p, q)$（以及正则 Poisson 括号——见第 2.1 节），我们不可能总是有一种类型的关系

$$[f, g] = i\hbar\{f, g\} \tag{1.5}$$

无论 f, g 和等号右边是如何排序的。[10]另一方面，二次（或线性）的性质在正则变换下并不不变。“如果没有一些额外的结构，我们就不可能量子化一个辛流形。” [GW]（这种类型的一般结果在量子力学发现二十多年后就已经确立了——见 [G46, V51]。）我们最多只能选择 (1.5) 有

[7]Jeno，后来的 Eugene Wigner，(1902 生于布达佩斯-1995 卒于普林斯顿）于 1963 年获得诺贝尔物理学奖。

[8]在 [N] 中讲述了力学中出现相空间概念的故事，抑或是相空间错综复杂的故事。

[9]系统的完全对称排序（见第 4.1 节）由 Hermann Weyl (1885-1955 年) 提出，他是 David Hilbert (1862-1943 年) 的学生，作为最后一位声望接近他老师的全能数学家。

[10]将在下文第 2.2 节中展示方程 (1.5) 确实有一个向量场解；我们还将解释为什么这个解在物理上不能令人满意。

效的可观测量的子集。如果问题具有连续对称性，那么明智的做法是在选定的动力学变量中选择其 Lie 代数生成元。上面提到的写成 p 和 q 的 (对称) 二次多项式就是这种类型：对于一个有 n 个自由度的系统，这些多项式张成了实辛群 $Sp(2n,\mathbb{R})$ 的一个投影表示对应的 Lie 代数 $sp(2n,\mathbb{R})$，该表示是其双覆盖的真实表示[11]，*偏辛群 (metaplectic group)*$Mp(2n)$，正则对易关系 (1.2) 的自同构群。它是一个非紧致单纯 Lie 群，其非平凡幺正不可约表示都是无限维的。另一个物理上非常重要的例子（考虑 Jordan 和 Heisenberg 文 [BHJ] 中）是角动量——(紧致) 旋转群的 Lie 代数 $so(3)$ 的 hermite 生成元（以及它的二折叠覆盖 $SU(2)$，它给了半整数自旋 $\mathbf{s}$ 一个空间[12]：

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}+\mathbf{s}\,,\quad [M_x,M_y]=i\hbar M_z\ \text{ etc. }\ (M_z=xp_y-yp_x+s_z). \tag{1.6}$$

下面的基本练习回顾了紧致 lie 群的表示理论和对易关系 (1.6) 可以用来计算 M_z 和 $\mathbf{M}^2:=M_x^2+M_y^2+M_z^2$ 的联合谱（它们之间是对易的）。

练习 1.1 (a) 使用对易关系 (1.6) 的形式

$$[M_z,M_\pm]=\pm\hbar M_\pm\,,\quad [M_+,M_-]=2\hbar M_z\ \text{ for }\ M_\pm=M_x\pm iM_y \tag{1.7}$$

来证明 M_z 的谱在 $SU(2)$ 任意不可约 (有限维) 表示中有如下形式

$$(M_z-m\hbar)|j,m\rangle=0\,,\quad m=-j,1-j,\ldots,j-1,j\,,\quad j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots\,. \tag{1.8}$$

(b) 运用关系

$$\mathbf{M}^2=M_z^2+\frac{1}{2}(M_+M_-+M_-M_+)=M_z^2+\hbar M_z+M_+M_- \tag{1.9}$$

来证明 $(\mathbf{M}^2-j(j+1)\hbar^2)|j,m\rangle=0$。

(**提示**: 运用关系 $M_-|j,-j\rangle=0(=M_+|j,j\rangle)$。)

然而，一般来说，没有“最佳算法”来量子化一个给定的经典系统。这就是为什么人们常说*量子化是一门艺术*（*quantization is an art*）[13]可以从下面三个我们知道的例子中了解量子化的含义。最熟悉的一个是 $M=\mathbb{R}^{2n}$ 装配了*正则辛形式 (canonical symplectic form)*

$$\omega=dp\wedge dq=\sum_{j=1}^{n}dp_j\wedge dq^j, \tag{1.10}$$

在确定的一个仿射结构其中，p_i 和 q^j 是 M 上的线性函数。另一个重要的例子是余切丛 $M=T^*\mathcal{Q}$ 装配了一个*切触形式 (contact form)* $\theta=pdq$, $q\in\mathcal{Q}$, $p\in T_q^*\mathcal{Q}$，它可以用一种自然的方式量子化 $\mathcal{Q}$ 的半密度 (half-density)。类似地，有一个自然的步骤通过合适线丛的全纯截面来量子化 Kähler[14]流形见第 2.1 节。这些例子有部分重叠。例如，我们可以在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上引入复结构，设

$$\sqrt{2}z_j=q_j-ip_j\ \Rightarrow dp\wedge dq=idz\wedge d\bar{z}. \tag{1.11}$$

[11]这不是一个矩阵群，更多关于 $Mp(2n)$ 及其应用的更多信息可以在 [F, deG] 或者 [T10] 的第 3 节和第 4 节及其中参考文献找到

[12]关于自旋的故事，请参阅 [Tom]；关于它与 Clifford 代数的关系，请参阅 [T11]）

[13]Ludwig Faddeev 在 2009 年 3 月洛桑听完 Witten 关于 [GW] 的演讲之后的讨论中使用了这句话，暗指可积系统量子化中的 [F] 的 Lax 序。一年后，Witten 的学生用同样的话作为 [G10] 第 2 节的标题。

[14]德国数学家 Erich Kähler (1906-2000 年) 于 1932 年在汉堡大学提出了 hemite 度规，关于他的工作和个性参见，尤其请参见陈省身的文章和 R. Brendt 和 A. Bohm 的文章。量子化 Kähler 流形是一个持续受到关注的生动课题，例如参见 [AdPW], [Hi], [GW], [W10], [G10]。我们将在下面的第 3 节对其进行研究。

然而，这两种看待经典相空间的方法并不完全相同。每个新结构都会减少理论的自然不变群。如果群保持 $\mathbb{R}^{2n}$ 的仿射结构是 $GL(2n,\mathbb{R})$，那么 Kähler 形式 (1.11) 的对称群就是它的子群 $U(n)$——$GL(2n,\mathbb{R})$ 的正交子群和实辛子群的交集：$U(n) \simeq O(2n) \cap Sp(2n,\mathbb{R})$。

2 几何量子化简介

我们从 Baez 解释 [B06] 为什么量子化是个谜开始。

“数学上，如果量子化是‘自然的’，那么它就会是一个从对象为辛流形 (= 相空间) 态射为辛映射 (= 正则变换) 的范畴 $Symp$ 到对象为 Hilbert 空间态射为幺正算子的范畴 $Hilb$ 的函子。” 实际上，有一个从 $Symp$ 到 $Hilb$ 的函子，它分配每一个 ($2n$ 维) 辛流形 M(或 (M,ω))Hilbert 空间 $L^2(M)$(依赖于与 M 上辛形式 ω 相关的度量，在仿射相空间的最简单情况由 (1.10) 给出)。这就是所谓的预量子化 *(prequantization)*，将在下文 2.2 节中简要介绍。[15]

2.1 辛几何的元素

Hamilton 力学是相空间中的几何。

——Vladimir Arnold (1937-2010), 1978.

范畴学的语言：读者不应该害怕范畴和函子等术语：这种语言由 Eilenberg 和 MacLane 引入，并由 Grothendieck 及其学派发展而来，在现代数学中已经相当普遍，而且对于数学物理中越来越多的问题——包括量子化（以及同调镜像对称，见 [G10]）非常自然。一个友好的简介，见 [B06]；在更高级的数学文献中，[GM] 的介绍性材料，包括前两章在内，是很有帮助的。为了方便读者，我们回顾几个非正式的定义。一个范畴 *(category)* $\mathcal{C}$ 由对象的类 *(class of objects)*$X,Y \in \mathcal{C}$ 和它们的非相交集合的映射 $Hom(X,Y)$ 组成，这些映射被称为态射 *(morphism)*，并表示为 $\varphi : X \to Y$，其复合满足结合律。我们注意到，范畴的定义只涉及对态射的操作，而不涉及对对象的操作。两个范畴之间的一个函子 *(functor)*$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是对象之间的一个映射，以及态射之间的一个映射 $\varphi \to F(\varphi)$，使得 $F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi)$，每当 $\varphi\psi$ 被定义时；特别地，$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$。一个重要的例子是基本群 *(fundamental group)*，它可以被看作是从拓扑空间范畴到群范畴的一个函子（相应的同态为态射）。

我们接着要定义辛微分几何学的一些基本概念，这是一个与数学物理持续相关的课题，有大量相关的文献——例如，见 [Br, CdS, deG, F, M, V]。

微分流形 M 的切丛 *(tangent bundle)* TM 是由向量场 *(vector fields)* 或方向导数 *(directional derivatives)*——即一阶齐次微分算子 $X^i(x)\partial_i$ 张成的，它们是具有局域坐标 x^i 的每个点邻域的导数 $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ 的线性组合。余切丛由 1-形式组成，由视为向量场上线性泛函的微分 dx^i 张成，使得

$$dx^i(\partial_j) = (dx^i, \partial_j) = \delta^i_j \quad (\delta^i_j = \mathrm{diag}(1, ..., 1)), \text{对于 } \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.1}$$

我们还假设 ∂_i 与 dx^j 反对易。与向量场 X 的缩并记为 $\hat{X}$，举例而言，我们应该有

$$\hat{\partial}_q dp \wedge dq = -dp. \tag{2.2}$$

[15]有关各种量子化方法的读者友好回顾（以及 266 种书目），见 [AE]。后面关于预量子化的更高级文献，见 [WZ, ZZ]；预量子化是 Kostant 和 Souriau 的几何量子化 [Wo] 的第一步，而几何量子化是从 Kirillov 的轨道方法 [K99] 发展而来的。一个非常有帮助的课堂笔记 [B] 回顾了它，而它也是近来研究 [H90, AdPW] 的主题；在 [GW, G10] 中的其它现代量子化方法，它也得到了简要讨论。

我们注意到，一个向量场 X 和微分形式 ω 的缩并更常被写成 $i_X\omega$。我们还可以使用张量场 $T^r_s(x)$（逆变阶数为 r 和协变阶数为 s）的概念，它被定义为张量积 $(T_xM)^r\otimes(T^*_xM)^s$ 的元素（光滑取决于 x）。在构建高阶外微分形式时，我们使用奇数微分的 d 的反对易性；如果 r 是形式 ω_r 的阶，那么：

$$d(\omega_r\wedge\alpha)=(d\omega_r)\wedge\alpha+(-1)^r\omega_r\wedge d\alpha\ (d^2=0). \tag{2.3}$$

如果 $d\omega_r=0$，我们称为 ω_r 的一个*闭形式 (closed form)*。如果存在一个 $(r-1)$-形式 θ 使得 $\omega_r=d\theta$，则它被称为是*恰当的 (exact)*。用 $\mathcal{C}_r$ 表示闭 r-形式的加法群，用 $\mathcal{B}_r$ 表示其恰当形式（*边界 (boundaries)*）的子群，我们将 r-阶*上同调群 (cohomology group)* 定义为商群

$$H^r(M)(=H^r(M,\mathbb{R}))=\mathcal{C}_r/\mathcal{B}_r. \tag{2.4}$$

另一个重要的概念，沿着一个向量场 X 的 *Lie*[16]导数 $\mathcal{L}_X$，(历史回顾，见 [Tr])，可以丛代数的意义上定义为：(1) 它与光滑函数上沿 X 的方向导数重合：$\mathcal{L}_Xf=Xf$; (2) 它在张量场的积上像一个导子一样运算 (即：满足 *Leibniz 法则*)：

$$\mathcal{L}_XS\otimes T=(\mathcal{L}_XS)\otimes T+S\otimes\mathcal{L}_XT; \tag{2.5}$$

(3) 它通过对易关系作用在向量场上：$\mathcal{L}_XY=[X,Y]$; (4) 作用于微分形式，它满足 *Cartan*[17] *魔法公式 (Cartan's magic formula)*：

$$\mathcal{L}_X\omega=\hat{X}d\omega+d\hat{X}\omega,\ \text{特别地},\ \mathcal{L}_Xd\omega=d\mathcal{L}_X\omega. \tag{2.6}$$

一个*辛流形 (symplectic manifold)*: 被定义为具有非退化闭 2-形式的流形。($2n$ 维流形上的非退化 2-形式 ω 的特征是对应的 Liouville[18]体积形式 $\omega^{\wedge n}$ 非零。）如果用局域坐标把辛形式写成 $\omega=\frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i\wedge dx^j$, $\omega_{ij}=-\omega_{ji}$，那么反对称矩阵 (ω_{ij}) 是可逆的，它的逆 $(\mathcal{P}^{ij})$ 定义了 M 上函数间的 *Poisson 括号 (Poisson brackets)*:

$$\{f,g\}=\mathcal{P}^{ij}\partial_if\partial_jg\quad \text{对于}\ \partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i},\ \mathcal{P}^{ik}\omega_{kj}=\delta^i_j. \tag{2.7}$$

每个辛流形都是偶数维且可定向的。在每个点的邻域，它都有局域 *Darboux*[19]*坐标* (p_i,q^j)，其中辛形式 ω 由正则表达式 (1.10) 给出。

辛流形 (M,ω) 上的每个函数 f 都对应一个 Hamilton[20]向量场 X_f，使得 $\hat{X}_f\omega:=\omega(X_f,\cdot)=df(\cdot)$。在上述仿射情况下，它由下面公式给出：

$$X_f=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\,. \tag{2.8}$$

M 上两个函数之间的 Poisson 括号用相应的向量场表示为

$$\{f,g\}\ =X_fg=-X_gf=\omega(X_g,X_f)=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}\,. \tag{2.9}$$

[16]挪威数学家 Sophus Lie（1842-1899 年）毕生致力于连续变换群理论的研究。

[17]Élie Cartan（1869-1951 年）提出了反对称微分形式的一般概念（1894-1904 年）和旋量理论（1913 年）；他在博士论文中完成了（1894 年）半单纯 Lie 代数的 Killing 分类。

[18]Joseph Liouville (1809-1882 年) 证明了 Hamilton 时间演化是保测度的。他对复分析和数论的贡献也很著名。

[19]Jean-Gaston Darboux(1842-1917 年) 在 1882 年对 Pfaff 问题的研究中确定了正则变量的存在。

[20]William Rowan Hamilton（1805-1865 年）在 1827-1835 年间提出了现在被称为 *Hamilton 形式*，也被称为 *Lagrange 形式*，将力学和（几何）光学统一起来。他在 1843 年发明了四元数（将在下文第 3.3 节讨论）。

由此可见，向量场的对易代数提供了 Poisson 括号的无穷维 Lie 代数的表示：

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}. \tag{2.10}$$

一个光滑流形 M 装备了一个 Poisson 括号 (即：是反对称的并且满足 *Jacobi* 恒等式 *(Jacobi identity)* 被称为是一个 *Poisson* 流形 *(Poisson manifold)*。) 从 (2.9) 中可以清楚地看出，Poisson 括号在 M 上光滑函数的代数上产生了服从 *Leibniz*[21]法则 *(Leibniz rule)* 的导子，从而定义了 *Poisson* 结构 *(Poisson structure)*：

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. \tag{2.11}$$

Poisson 流形（它是辛的，当且仅当矩阵 $\mathcal{P}$ 定义的 Poisson 二重向量 (Poisson bivector) 是可逆的）是形变量子化的天然游乐场（将在下文第 4 节对其进行考察）。

一个紧致辛流形 (compact symplectic manifold) 应该必须有一个非平凡第二上同调群。由此可见，一个球面 $\mathbb{S}^n$ 只有在 $n = 2$ 时才具有辛结构。

练习 2.1 证明 1-形式

$$\eta_1 = i\frac{zd\bar{z} - \bar{z}dz}{2z\bar{z}} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{2.12}$$

在点状平面 $\mathbb{C}^* = \{z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2; r^2 := x^2 + y^2 > 0\}$ 是闭的，但不是恰当的，尽管是局域的，围绕任意非零点 (x, y)，它可以写成多值函数的微分，

$$\eta_1 = d\varphi \text{对于} \varphi = \arcsin\frac{y}{r} = \arccos\frac{x}{r} = \arctan\frac{y}{x}. \tag{2.13}$$

证明如果 η 是 $H^1(C^*)$ 的任意元素，即如果 $\int_{\mathbb{S}^1}\eta = b \neq 0$ 那么 1-形式 $\eta - \frac{b}{2\pi}\eta_1$ 是恰当的（提示：使用 $d\varphi$ 沿单位圆的积分是 2π 这一事实）。

一个（赝）*Riemann*[22]流形 *((pseudo) Riemannian manifold)* 是一个实微分流形 M，在切空间 TM 的每个点装备了一个从点到点光滑变化的非退化二次型 g。我们主要感兴趣的是 *Riemann* 度规（*Riemannian metric*）的情况，在这种情况下，形式 g 是正定的（*positive definite*）。一个 n 维复流形（*complex manifold*）可以看成是一个 $2n$ 维实流形装备了一个可积复结构（*complex structure*）——即：TM 的一个向量丛自同态 J (即就是一个 $(1,1)$ 型张量场) 使得 $J^2 = -1$。

这种平方 -1 的自同态（即：TM 到它本身的线性映射）被称为殆复结构（*almost complex structure*）。一个殆复结构 J 和一个 Riemann 度规 g 定义了一个 *Hermite*[23]结构（*Hermitian structure*），如果它们满足相容条件

$$g(JX, JY) = g(X, Y). \tag{2.14}$$

每个几乎殆 Hemite 流形都有一个非退化基本 2-形式（*fundamental 2-form*）$\omega(= \omega_{g,J})$：

$$\begin{aligned} \omega(X, Y) := g(X, JY) \Rightarrow \omega(X, Y) &= \omega(JX, JY) \\ = g(JX, J^2Y) = -g(JX, Y) = -g(Y, JX) &= -\omega(Y, X). \end{aligned} \tag{2.15}$$

如果殆复结构依赖于 Levi-Civita[24]联络是协变常数，则基本形式是闭的（并且因此是辛的）：

$$\bigtriangledown J = 0 \Rightarrow d\omega_{g,J} = 0 \tag{2.16}$$

[21]Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716 年)，数学家兼哲学家，符号逻辑的先驱，微积分的共同发现者——Isaac Newton(1642-1727 年) 齐名。

[22]伟大的德国数学家 Bernhard Riemann (1826-1866) 在他 1854 年的首次演讲（实际上是试讲）中引入了我们称为 Riemann 几何。关于 Riemann 及其研究的更多信息，请参见 [Mo]。

[23]以法国数学家 Charles Hermite（1822-1901）的名字命名，他是第一个证明自然对数的基 e 是超越数的人。

[24]意大利数学家 Tullio Levi-Civita（1873-1941）因其关于绝对微分（张量）运算 *(absolute differential (tensor) calculus)* 的研究而闻名。

(此外，与 J 有关的所谓 Nijenhuis 张量 N_J（秩为 $(2,1)$）也消失了；这就提供了一个可积分性条件，它是殆复结构成为复结构 *(complex structure)* 的充分必要条件)。

切丛 TM 的自同态 J 定义了一个可积 *(integrable)* 复结构，如果 M 是一个复流形具有全纯图册 (包括全纯转移函数)，而且算子 J 在其上的作用是与 i 相乘。一个 *Kähler 流形*（*Kähler manifold*）是一个具有相容复结构的 Riemann 流形。(Riemann 几何背景下的复流形介绍性课程可以参见 [V]。关于 Kähler 流形更系统的研究，读者可以参见笔记 [Ba] 和 [M]。我们将在第 3 节讨论 $\mathbb{C}^n$ 作为 Kähler 流形的量子化问题。)

复形式可被唯一分解为 dz^i 的 p 次齐次函数和 dz^j 的 q 次齐次函数的 (p,q)-形式和。微分形式 d 可以被分解为 *Dolbeault 微分*（*Dolbeault differentials*）∂ 和 $\bar{\partial}$，分别增加 p 和 q：

$$\partial = dz \wedge \frac{\partial}{\partial z}, \bar{\partial} = d\bar{z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (d = \partial + \bar{\partial}). \tag{2.17}$$

类似地，我们可以定义 *Dolbeault 上同调群*（*Dolbeault cohomology groups*）$H^{p,q}$。

2.2 预量子化

我们将看到，即使是量子化的第一步，也并不总是存在的：它对经典力学数据施加了一些限制；另一方面，它需要添加一些额外的结构（复线丛），而这些结构的性质可能会有所不同。换句话说，当预量子化成为可能时，它一般并不是唯一的。

M 上的函数在预量子化中扮演着两种不同的角色：第一个是实光滑函数 $f(p,q)$ 张成（经典）可观测量 Poisson 代数 $\mathcal{A}$；第二个则是在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中 “预量子态” 是向量（M 上的复函数 $\Psi(p,q)$，依赖于 Liouville 测度的平方可积）。预量子化要求 M 装备一个复线丛（*complex line bundle*）L。另一种花哨的说法是，*波函数*（包括量子和” 预量子”）是一个 *$U(1)$-旋子*（*torsor*）——只有相关相（属于 $U(1)$）才具有物理意义。(基础的、物理学家向的” 旋子” 概念介绍，请参见 [B09]。) 我们正在寻找一个*预量子化映射*（*prequantization map*）$\mathcal{P} : \mathcal{A} \to \mathcal{P}\mathcal{A}$，其中 $\mathcal{P}\mathcal{A}$ 是 “预量子可观测量” 的作用在 $\mathcal{H}$ 上一个算子代数并且满足：

(i) $\mathcal{P}(f)$ 关于 f 是线性的并且 $\mathcal{P}(1) = \mathbf{1}$ ($\mathcal{H}$ 中的单位算子);

(ii) 它将 Poisson 括号的 Lie 代数映射为对易代数：

$$[\mathcal{P}(f), \mathcal{P}(g)] = i\hbar \mathcal{P}(\{f,g\})\,. \tag{2.18}$$

(我们还可以假设一个函子性性质——一个辛流形映射到另一个辛流形下的协变性——见比如 [AE] 第三节的要求 (Q4)。) 向量场 $\mathcal{P}(f) = i\hbar X_f$ 遵守 (2.18) 但违反条件 (i) (因为 $X_1 = 0$)。然而，有一个（唯一的）非齐次一阶微分算子确实满足仿射相空间的这两个特性：

$$\mathcal{P}(f) = i\hbar X_f + f + \theta(X_f)\,, \quad \theta = pdq \quad (\omega = d\theta)\,. \tag{2.19}$$

练习 2.2 运用 $\theta(X_f) = -p\frac{\partial f}{\partial p}$ 验证

$$[\mathcal{P}(f), \mathcal{P}(g)] = \mathcal{P}(\{f,g\}). \tag{2.20}$$

如果我们将 f 与经典 Hamilton 量 H 结合，那么加到 X_H 的项就是 (负) Lagrange 量：$H - p\partial H/\partial p = -\mathcal{L}$。把 H 看成时间演化的生成元并对时间积分，我们会发现波函数中的相位因子和 Feynman 路径积分非常相似。

特别地，对于坐标和动量方程 (2.19) 给出

$$\mathcal{P}(q) = q + i\hbar\partial/\partial p\,,\ \ \mathcal{P}(p) = -i\hbar\partial/\partial q\,. \tag{2.21}$$

我们注意到我们的处理方案将实可观测量 f 映射到 Hermite 算子[25] (这一要求隐藏在与 (1.3) 的对应关系中):

(iii) 对于光滑实函数 $f(p,q)$ 有 $\mathcal{P}(f)^* = \mathcal{P}(f)$。

然而，$f \to \mathcal{P}(f)$ 的关联在物理上并不令人满意，因为它违反了可观测量之间的简单代数关系。例如，非相对论粒子动能的预量子化图像

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},\ \mathbf{p}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \tag{2.22}$$

是

$$\mathcal{P}(H_0) = -i\hbar\partial_{\mathbf{p}}H_0\partial_{\mathbf{q}} - H_0 \neq H_0(\mathcal{P}(\mathbf{p})). \tag{2.23}$$

特别地，算子 $\mathcal{P}(H_0)$ 违反了能量是正的。

只要 M 是一个切丛（*cotangent bundle*）$M = T^*\mathcal{Q}$，定义 (2.19) 就适用，所以辛形式是恰当的 $\omega = d\theta$。这绝不是紧致相流形（本来有一个零体积）的情况。一般情况下，预量子化要求 $\omega/2\pi\hbar$ 表示 $H^2(M,\mathbb{R})$ 中的一个积分上同调类——即：其在 M 中任意闭（可定向）2-曲面上的积分是一个整数。这基本上就是 Bohr-Sommerfeld[26](-Wilson) 量子化条件，发现于 1915 年，即量子力学创立之前。比如，一个半径为 r 的 2-球面 $\mathbb{S}_r^2$ 是（预）量子化 (对于确定值的 Planck 常数 $\hbar$) 当且仅当 $r = n\hbar/2, n \in \mathbb{Z}$。在这两种情况下，如果我们在切触形式 θ 上添加一个恰当形式 df，满足（局域或全局）$d\theta = \omega$，那么辛形式就不会改变。这种变化可以通过将我们的 Hilbert 空间 $\mathcal{L}^2(M,\omega)$ 的元素乘以相位因子 $\exp(if/\hbar)$ 来补偿。这表明，将 $P(f)$ 视为作用于 M 上的复线丛 L 的截面的空间是更自然的做法，其中装备联络 D 形式如下：

$$\begin{gathered} D = d - \frac{i}{\hbar}\theta\,,\ \ d = dx^i\partial_i\,,\ \ \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \Rightarrow \\ D_X = X - \frac{i}{\hbar}\theta(X)\ \ (X = X^i\partial_i\,,\ \theta = \theta_i dx^i\ \Rightarrow\ \theta(X) = \theta_i X^i)\,, \end{gathered} \tag{2.24}$$

其中，X 是一个任意 (不必是 Hamilton) 向量场，x^i 是 M 上的局域坐标 (并且我们对重复指标使用求和约定)。这种联络的曲率形式与我们的辛形式 ω 相符：

$$\begin{aligned} R(X,Y) &:= i([D_X, D_Y] - D_{[X,Y]}) \\ &= \frac{1}{\hbar}(X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X,Y])) \\ &= \frac{1}{\hbar}d\theta(X,Y) = \frac{1}{\hbar}\omega(X,Y). \end{aligned} \tag{2.25}$$

为了了解在一般相流形上存在与辛结构相容的 Hermite 联络是如何产生整数性条件的，我们应该想到一个覆盖流形 M 的开邻域 U_α 的图册（*atlas of open neighbourhoods* U_α）。量子力学波函数由复线丛的一个截面代替。它是由每个卡 U_α 上的复值函数 Φ_α 和每个非空交集 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ 的转移函数 $g_{\alpha\beta}$ 的系统给出的，使得 $U_{\alpha\beta}$ 上的 $\Phi_\alpha = g_{\alpha\beta}\Phi_\beta$ 。双交集和三交集的一致性要求上链条件 *(cocycle condition)*:

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = 1,\ \ g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1. \tag{2.26}$$

[25]实际上，我们需要自伴算子（*selfadjoint operators*）来确保它们谱是实的，但我们不会在此讨论由此产生的无界算子定义域等细节。

[26]Bohr 模型由 Arnold Sommerfeld（1868-1951）进一步发展。他在慕尼黑的博士生中有四人获得了诺贝尔物理学奖。Sommerfeld 本人曾 81 次被提名为 Nobel 物理学奖候选人，比其他任何物理学家都多。英国物理学家 William Wilson（1875-1965）于 1915 年独立发现了量子化条件。

如果切触 1-形式 θ_α 的关系是 $\theta_\alpha = \theta_\beta + du_{\alpha\beta}$ 通过两个卡的交集 $U_{\alpha\beta}$ 关联起来，那么联络的 Hermite 性和上链条件意味着 $u_{\alpha\beta}$ 的（可加）上链的整数性：

$$g_{\alpha\beta} = \exp(i\frac{u_{\alpha\beta}}{\hbar}) \Rightarrow u_{\alpha\beta} + u_{\beta\gamma} + u_{\gamma\alpha} = hn_{\alpha\beta\gamma} \text{ 其中 } n_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}. \tag{2.27}$$

上述定理表明辛形式的整数性条件对于曲率为 ω 的具有相容联络 D 的 Hermite 线丛 L 的存在而言是充分必要的，这一定理（至少）可以追溯到 André Weil (1906-1998) 1958 年的著作 [W]。

看一下 2-球面的例子，我们会产生一种错误的印象，以为只要重标度辛形式，对于 $\omega \in H^2(M,\mathbb{R})$ 的整数性条件就可以始终满足。两个 2-球面的乘积 $\mathbb{S}^2_r \times \mathbb{S}^2_s$ 具有不相称半径（即：无理 r/s），这个简单例子说明情况并非如此：存在（紧致）辛流形不可预量子化。

预量子化的等价类（只要存在）是由在圆群 $U(1)$ 中取值的 M 的第一上同调群或者等价地由 M 的基本群的（$U(1)$-值）特征给出的：

$$H^1(M,U(1)) = \pi_1(M)^*. \tag{2.28}$$

我们将以圆的切线丛为例来说明这一表述，即在圆柱相空间上

$$M = T^*\mathbb{S}^1, \quad \omega = dp \wedge d\varphi = d\theta, \quad \theta = p\,d\varphi, \quad p \in \mathbb{R}, \quad 2\pi\varphi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \tag{2.29}$$

圆的基本群是 $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$，它的特征的群与 $U(1)$ 相符合。因此，我们期望有一个由 $U(1)$ 标注的 (M,ω) 的非等价预量子化的连续体 (continuum)。这可以通过在联络 D 中加入闭形式 $i\lambda\, d\varphi$ 来实现（由于 $d\varphi$ 不是圆上的全局坐标，所以 $d\varphi$ 并不恰当）。把它插入 (2.21) 中，我们发现 $\mathcal{P}_\lambda(p) = \hbar\lambda - i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$，这对于 $\lambda \in [0,1)$ 就产生了 λ-依赖的非等价预量子化。

2.3 从预量子化到量子化

现在看来，上帝在第一天创造了一个经典宇宙，然后在第二天将其量子化的说法并不成立。

——John Baez [B06]

尽管对它的存在性和非唯一性有必要限制，预量子化似乎提供了一种从相空间上复线丛的足够广泛的类到 Hilbert 空间上自然定义的算子代数的良好映射，以至于我们的条件 (i)、(ii)(包括方程 (2.18)) 和 (iii) 确实得到满足。然而，这个过程确实有一个多余的缺点：结果的预量子化代数和对应的 Hilbert 空间太大了。Matthias Blau 在他的渴望东西的列表 [B] 中包括了以下*不能消减要求 (irreducibility requirement)*。考虑一个*经典可观测量的完备集 (complete set of classical observables)*，比如在仿射相空间中最简单的情况下的 p_i 和 q^j，使得每个经典可观测量都是它们的函数；或者，我们可以通过这样的特性来描述一个完备集 $(f_1,\ldots,f_n)$：唯一与所有集合都有零 Poisson 括号的经典观测变量是常数。Blau 然后要求它们在*量子化映射 (quantization map)* $Q(f)$（从经典可观测量的代数 $\mathcal{A}$ 到量子算子代数 $\mathcal{A}_\hbar$）下的像 $(Q(f_1),\ldots,Q(f_n))$ 是*算子不可约的 (operator irreducible)*，即如果一个算子 A 在 $\mathcal{A}_\hbar$ 中与所有 $Q(f_j)$ 对易，则它应该是单位算子的倍数。如果我们在 Hilbert 空间 $\mathcal{L}^2(M,\omega)$ 中允许所有算子，那么我们会看到预量子化违反了这个条件：算子 $p - \mathcal{P}(p) = p + i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ 与所有 $\mathcal{P}(p),\mathcal{P}(q)$ 对易（而不是单位算子的倍数）。有人可能会基于 p 的乘法算子不是 $\mathcal{P}(f)$ 的形式而反对这个异议。在第 2.2 节指出的物理缺陷：预量子化的非相对论动能 (2.23) 与预量子化动量的平方不成比例且不是正算子似乎更为严重。因此，我们将寻找一个量子化映射 Q，满足条件 (i)、(iii)（和 (ii) 的弱

化版本）以及能够保证实可观测量平方的量子对应体是正的。以下要求以直接的方式实现了这一目标。

（iv）如果 $Q(f)$ 是实可观测量 f 的像，则应有 $Q(f^2)=Q(f)^2$。

备注 *2.1*（形式化）形变量子化的框架中，见第 4.2 节，只能假设这样的等式在 $\hbar^2$ 的阶数上成立。根据 Darboux 定理（由 Sophus Lie(1842-1899) 推广——见第 4.2 节），每个辛流形都接受具有局域常 Poisson 二重向量的正则坐标。一个较弱的要求足以确保余切丛上的动能是正的，即要求 (iv) 对于正则动量的函数成立。

Baez [B06] 猜测，从辛范畴到 Hilbert 范畴不存在保持正性的函子。事实上，对于仿射相空间中的 p 和 q 的多项式代数，也有一个此类结果（由 Groenewold 和 van Hove 提出）[27]。对于可观测量代数的某个" 适当选择的"Poisson 子代数，我们不得不接受要求（ii）的弱化版本，只要求 (2.18)（用 Q 替换 $\mathcal{P}$）的有效性。量子化对物理学家来说是一门艺术，对数学家来说则是一个谜。为了让大家了解几何量子化的其它内容，我们将简要介绍该理论的下一步，即定义极化的概念。

对数学理解的探索始于量子化艺术被掌握并在物理实例中展示之后。几何量子化不是遵循数学直觉，而是试图从这些已知例子中提取一般性质。第一个观察结果是，状态向量应该只取决于相空间变量的一半，就像 Schrödinger 表象中那样。更确切地说，我们应该处理的波函数取决于 *Poisson* 对易观测量的最大集合（*maximal set of Poisson commuting observables*）。消除一半论证的正确方法是考虑我们线丛的截面，这些截面沿着向量场的一个 n 维 “可积” 子丛 S 是协变常数。换句话说，我们的波函数 Ψ 应该满足一系列相容方程（*compatible equations*）:

$$D_X\Psi=0\,,\quad X\in S\quad\Rightarrow[D_X,D_Y]\Psi=0\quad\text{对于}\quad X,Y\in S\,. \tag{2.30}$$

从 (2.25) 中可以清楚地看到，如果子丛 S 在对易下是封闭的（换句话说，如果 $X,Y\in S\Rightarrow [X,Y]\in S$，即如果 S 中的向量场是对合的（in involution）），并且如果相应的积分流形是（极大）迷向的（(*maximally*) *isotropic*）——即：对于 $X,Y\in S$ 有 $\omega(X,Y)=0$（并且 $\dim S=\frac{1}{2}\dim M=n$），那么 (2.30) 中的相容性（也称为可积性 *(integrability)*）条件自动得到满足。这样的极大迷向子流形称为是 *Lagrange* 的（*Lagrangian*）。在此，我们默认 S 的维度不会从点到点之间改变。这并不是天真的假设。对于 $M=\mathbb{S}^2$，这意味着一个极化将由一个不是处处消失的向量场给出。另一方面，我们已知 2-球面上没有这样全局定义的向量场。（实际上，在闭 2 维曲面中只有环面有一个。）解决这个困难的方法是复化相空间（的切丛）。可积 Lagrange 子丛确实更可能存在于 $TM_{\mathbb{C}}$ 上而不是 TM 上。因此，我们最终得到以下**定义**。*一个辛流形* (M,ω) *的一个极化是一个* M *的复化切丛* $TM_{\mathbb{C}}$ *的可积极大迷向 (Lagrange) 子丛* S。

我们将考虑两种相反类型的示例：实数，$S=\bar{S}$，和 Kähler 极化，$S\cap\bar{S}=\{0\}$，这是应用中最常遇到的类型。由于实极化是初级量子力学的标准知识，我们将只简要提及它们，而将单独的一节用于（复）Kähler 极化。

一个实极化（*real polarization*）通常在余切丛 $M=T^*\mathcal{Q}$ 中遇到。在局部坐标中，S 由垂直向量场 $\partial/\partial p$ 所张成，产生标准的 Schrödinger 表示，在该表示中，坐标被表示为乘以 q（而不是乘以 (2.21) 中的预量子算子 $\mathcal{P}(q)$）。当 $\mathcal{Q}$ 涉及一个圆时（其中没有全局坐标），用周期函数替换多值坐标 φ 是有利的，正如在这种类型的最简单示例 $T^*\mathbb{S}^1$ 切触形式为 $\theta=pd\varphi$

[27]我们将在下面的第 4.1 节中更多地讨论荷兰理论物理学家 H.J. Groenewold 和他的论文 [G46]。在 1951 年的一对论文中，比利时物理学家 Leon van Hove (1924-1990) 精炼并扩展了 Groenewold 的结果，有效地显示不存在与 $\mathbb{R}^{2n}$ 的 Schrödinger 量子化一致的量子化函子。

中所示。在这种情况下，我们可以引入全局截面 Ψ（满足 $\frac{\partial}{\partial p}\Psi = 0$）作为 $e^{\pm i\varphi}$ 的解析函数。然后动量算子的谱是离散的：

$$Q(p) = i\hbar X_p = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \Rightarrow (Q(p) - n\hbar)e^{in\varphi} = 0,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{2.31}$$

在这个例子中，坐标和动量之间没有对称性。如在 [B] 中讨论的，动量空间图像不总是存在于 $T^*\mathcal{Q}$ 中，而当它存在时可能涉及一些细节。

问题出现在如何在极化截面的“物理 Hilbert 空间”中定义内积，即在 $\mathcal{Q}$ 上的函数。我们不能使用 Liouville 测度的限制，因为在纤维上的积分发散（对于与 p 无关的函数）。如果 $\mathcal{Q}$ 是一个 Riemann 流形，例如，如果度量是通过动能隐式给出的，我们可以使用它上面的相应体积形式。然而，一般来说，商空间 $M/S \sim \mathcal{Q}$ 上没有正则测度。在这种情况下，几何量子化规定使用半密度（*half density*），定义为行列式丛（*determinant bundle*）$Det\mathcal{Q} = \Lambda^n T^*\mathcal{Q}$ 的平方根，行列式丛是余切丛的 n 次反对称幂（见 [AE], [B]）。

3 Kähler 流形的量子化

3.1 复极化：Bargmann 空间

一个 (赝)Kähler 流形可以被定义为一个复流形装备了一个非退化 Hemite 形式其实部是一个 (赝)Riemann 度规且其虚部是一个辛形式 (见第 2.1 节)。正如实仿射辛空间 ($\mathbb{R}^{2n}, \omega = dp \wedge dq$) 是具有一个实极化的辛流形的原型一样，复空间 $\mathbb{C}^n$，装备了 Hemite 形式

$$dz \otimes d\bar{z}\,(\equiv \sum_1^n dz_j \otimes d\bar{z}_j) = g - i\omega\,, \quad \omega = idz \wedge d\bar{z} \tag{3.1}$$

($g = \frac{1}{2}(dz \otimes d\bar{z} + d\bar{z} \otimes dz)$)，也可以作为 Kähler 流形的原型。更一般地说，局域上，任何 (实)Kähler 形式 (运用记号 (2.17)) 可以写成

$$\omega = i\partial\bar{\partial}K,\ (K = \bar{K},\ d = \partial + \bar{\partial}). \tag{3.2}$$

或者，从实 $2n$ 维辛向量空间 ($V = \mathbb{R}^{2n}$, ω) 开始是有指导意义的。一个复结构 *(complex structure)* 是平方 -1 的一个 (实) 映射 $J : V \to V$——见第 2.1 节。(实反对称矩阵 $\epsilon := i\sigma_2$ 提供了一个 2 维例子，其中 σ_j 是 Hemite 的 Pauli 矩阵。) 这样的 J 给了 V 复向量空间的结构：与复数 $a + ib$ 的乘积被定义为 $(a + ib)v = av + bJv$。复结构 J 与辛形式 ω 相容，如果

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v) \text{ for all } u, v \in V. \tag{3.3}$$

那么，$g(u, v) := \omega(Ju, v)$ 定义了一个非退化对称双线性形式，而形式 $h(u, v) = g(u, v) - i\omega(u, v)$ 是 (赝)Hemite 的。我们将把注意力限制在 g 和 h 是正定的 Kähler（而不是赝 Kähler）形式上。

在我们的情况中 (i.e. 对于出现在 (3.1) 中的 ω)，Kähler 势 K 和切触形式 θ 由下式给出

$$K = z\bar{z},\ \theta = \frac{i}{2}(zd\bar{z} - \bar{z}dz). \tag{3.4}$$

对应于 z 和 $\bar{z}$ 的 Hamilton 向量场则为：

$$X_z = i\frac{\partial}{\partial\bar{z}},\ X_{\bar{z}} = -i\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \{z, \bar{z}\} = i. \tag{3.5}$$

我们通过引入被协变导数 (2.24) 湮灭的截面来定义复极化，其中 $Q(z) = z$

$$\bar{D} := D\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) = \frac{\partial}{\partial\bar{z}} + \frac{1}{2\hbar}(zd\bar{z} - \bar{z}dz)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) = \frac{\partial}{\partial\bar{z}} + \frac{z}{2\hbar}. \tag{3.6}$$

一般协变常数截面——i.e., 方程 $\bar{D}\Psi = 0$ 的一般解是

$$\Psi(z, \bar{z}) = \psi(z) \exp\left(-\frac{K}{2\hbar}\right),\ K = z\bar{z}, \tag{3.7}$$

其中，$\psi(z)$ 是具有有限范数平方的 z 的任意整解析函数

$$||\Psi||^2 = \int |\psi(z)|^2 \exp\left(-\frac{K}{\hbar}\right) d^{2n}z < \infty\ (d^{2n}z \sim \omega^n). \tag{3.8}$$

Valentine Bargmann (1908-1989) 在 [B61] 中已经引入并研究了这类整函数的 Hilbert 空间 $\mathcal{B}(= \mathcal{B}_n)$，我们将其称为 *Bargmann* 空间 *(Bargmann space)*。与 z 相乘的结果就是产生算子 *(creation operator)* a^*。对应的湮灭算子有形式

$$a := Q(\bar{z}) = i\hbar X_{\bar{z}} + \frac{\partial}{2\partial z}K = \hbar\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\bar{z}, \tag{3.9}$$

第二项由 a 与协变导数 $\bar{D}$ 对易的条件决定。

练习 3.1 证明 a 和 a^* 是关于由 (3.8) 定义的 $\mathcal{B}$ 中的标量积互为 Hermite 共轭，并满足正则对易关系

$$[a_i, a_j] = 0 = [a_i^*, a_j^*],\ \ [a_i, a_j^*] = \hbar\delta_{ij}. \tag{3.10}$$

用由 (3.7) 给出的真空向量的 n 个产生算子和 n 个湮灭算子的 Fock 空间识别 $\mathcal{B}_n$，其中 $\psi(z) = 1$：

$$|0\rangle = \exp\left(-\frac{K}{2\hbar}\right),\ a_i|0\rangle = 0 = \langle 0|\, a_j^*. \tag{3.11}$$

备注 3.1 回顾变量的改变 (1.11)，我们可以发现量子谐振子 Hamilton 量 H_0 与 a^* 和 a 的对称积相对应：

$$H_0 := \frac{1}{2}(p^2 + q^2) = \frac{1}{2}(a^*a + aa^*) = \hbar(z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{n}{2}) + \frac{1}{2}z\bar{z}. \tag{3.12}$$

来自 Weyl 排序的附加项 $\frac{n}{2}$ 反映了这样一个事实，即 Fock（Bargmann）空间携带偏辛群 $Mp(2n)$（$Sp(2n, \mathbb{R})$ 的双覆盖）的一个表示 [W64]——同时参见 [F], [deG], [T10] 其中的参考文献。关于使用半形式处理谐振子的另一种方法，见 [B]。

3.2 Bargmann 空间 $\mathcal{B}_2$ 作为 $SU(2)$ 的模型空间

现在我们将考虑 (3.1) 的 $n = 2$ 特殊情况，它提供了 $SU(2)$ 不可约表示的模型。这个例子非常丰富。下面我们将（1）概述 Julian Schwinger(1918-1994)[Sc] 和 Bargmann(1918-1994)[B62] 关于 $SU(2)$ 的表示论的结论（转载于 [QTAM]），将其视为一个量子化问题，并将指出它对任意半单紧致 Lie 群的推广；（2）考虑约束条件

$$z\bar{z}(= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) = \hbar N \tag{3.13}$$

其中，N 是任意固定的正整数，并研究对应的规范理论，从而产生 2-球面的量子化。(3) 在下一小节中，我们将展示 $\mathbb{C}^2$ 的超 *Kähler* 结构 *(hyperkähler structure)*（[Hi]），从而介绍——尽管是在一个相当平凡的上下文中——一些基本概念，特别是 Gukov 和 Witten 最近用过的一些基本概念（[GW], [G10],[W10]）。

首先，我们注意到任何 Bargmann 空间 $\mathcal{B}$ 都分裂为齐次多项式 $\psi(z) = h_k(z)\,(h_k(\rho z) = \rho^k h_k(z))$ 的子空间的 (正交) 直和。事实上，关联的波函数 Ψ_k (3.7) 张成了特征值为 $(k + \frac{n}{2})\hbar$

的 H_0 的特征子空间，因此不同度数 k 的多项式是相互正交的。对于 $n=2$，$H_0/\hbar$ 的特征值 N 包含所有正整数，并且给出相应特征子空间的维数，这些特征子空间携带 $SU(2)$ 的不可约表示，每个表示出现一次。

这一构造可以扩展到任意半单紧 Lie 群 G，方法是通过将每个点的纤维替换为 G 的 Lie 代数的 Cartan 子代数的共轭来考虑余切丛 T^*G 的子丛（在 [HIOPT] 中讨论了 $G=SU(n)$ 及其 q-形变的情况）。

我们现在开始研究由约束条件 (3.13) 生成的有限维规范理论，这个约束条件产生了振子 Hamilton 量 (3.12) 的特征子空间。显然，这个 Hamilton 约束在由其与基本变量的 Poisson 括号生成的 $U(1)$ 相变下是不变的。利用 Poisson 括号 (3.5) 和对易关系 (1.2)，并将方程 (3.13) 中的 N 首先视为经典变量，然后视为量子动力学变量，我们得到：

$$\{N,z\}=-iz,\ e^{iN\alpha}ze^{-iN\alpha}=e^{i\alpha}z,\ e^{iN\alpha}ae^{-iN\alpha}=e^{-i\alpha}a. \tag{3.14}$$

对于固定的 N，方程 (3.13) 在 $\mathbb{C}^2\sim\mathbb{R}^4$ 中定义了一个三维球面 $\mathbb{S}^3$；根据 (3.14)，它可以被视为 $\mathbb{S}^2(=\mathbb{S}^2(\hbar N))$ 上的一个 $U(1)$ 纤维丛（称为 *Hopf 纤维化 (Hopf fibration)*）。

Heinz Hopf (1894-1971) 于 1931 年引入了这种纤维化。它属于仅有的三个（非平凡）纤维化家族之一，这些纤维化中总空间、基空间和纤维都是球面（并且以下同态的序列是正合的）：

$$0\to\mathbb{S}^1\hookrightarrow\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^2\to 0;\ 0\to\mathbb{S}^3\hookrightarrow\mathbb{S}^7\to\mathbb{S}^4\to 0;\ 0\to\mathbb{S}^7\hookrightarrow\mathbb{S}^{15}\to\mathbb{S}^8\to 0. \tag{3.15}$$

这个事实与 Adolf Hurwitz (1859-1919) 的定理有关，该定理识别了*范数除法代数 (normed division algebras)* 为*实数、复数、四元数和八元数 (the real and the complex numbers, the quaternions and the octonions)*——参见例如 [B02]。(实数对应于序列 $\mathbb{S}^0\hookrightarrow\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$，其中 $\mathbb{S}^0=\{\pm 1\}$。)

为了展示（并量子化）$\mathbb{S}^2(\hbar N)$ 的辛结构，引入三个满足一个关系的规范不变坐标是有利的（参见我们在 2.3 节对 $\mathbb{S}^1$ 的处理）：

$$\xi_j=z\sigma_j\bar{z},\ j=1,2,3,\Rightarrow\xi^2=(z\bar{z})^2=(\hbar N)^2. \tag{3.16}$$

将形式 ω (3.1) 约化到 2 球面 (3.16) 上，可以用 Poincaré[28] 的留数来表示，这个留数涉及到亚纯 3-形式

$$\omega_3:=\frac{d\xi_1\wedge d\xi_2\wedge d\xi_3}{f(\xi)},\ f=\frac{1}{2}(\xi^2-\hbar^2N^2) \tag{3.17}$$

沿着超曲面 $f=0$ 的留数。亚纯 n-形式的 *Poincaré 留数 (Poincaré residue)*

$$\omega_n=\frac{g(z)}{f(z)}dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n, \tag{3.18}$$

其中 f 和 g 是全纯函数，定义为超曲面 $f(z)=0$ 上的全纯 $n-1$ 形式，并且该形式在 $\mathbb{C}^n$ 中具有局域扩张 ρ，使得 $\omega_n=\frac{df}{f}\wedge\rho$。如果在超曲面 $f=0$ 的某个邻域 U 中，$\left.\frac{\partial f}{\partial z_j}\right|_{f=0}\neq 0$，则

$$\operatorname{Res}\omega_n=g(z)(-1)^{j-1}\left.\frac{d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_j\wedge\cdots\wedge d\xi_n}{\frac{\partial f}{\partial\xi_j}}\right|_{f=0} \tag{3.19}$$

在 U 中。

练习 3.2 计算 3-形式 (3.17) 在变量 ξ 和球面角 θ,φ 下的留数，

$$\xi_1+i\xi_2=2z_1\bar{z}_2=\hbar N\sin\theta e^{-i\varphi}, \tag{3.20}$$
$$\xi_3=z_1\bar{z}_1-z_2\bar{z}_2=\hbar N\cos\theta \qquad (2z_1z_2=\hbar N\sin\theta e^{i\alpha}).$$

[28] Jules Henri Poincaré (1854-1912) 在 1887 年引入了他的留数 - 参见 [Poincare], **11**.

证明结果与形式 ω (3.1) 在球面 (3.13) 上的限制（$dN=0$）相一致。(提示：证明 ω 可以写成球面坐标系下的形式

$$\omega=\frac{\hbar}{2}(dN\wedge(d\alpha-\cos\theta d\varphi)+N\sin\theta d\theta\wedge d\varphi) \tag{3.21}$$

回顾 N 是假设下的一个正整数（因此 $\hbar N$ 属于振子 Hamilton 量 H_0 的谱 (方程 (3.12)),对于 $n=2$，我们得出 2 球面的辛形式的积分是量子化的：

$$\int\frac{\operatorname{Res}\omega_3}{4\pi\hbar}=\frac{N}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}\sin\theta\,d\theta\wedge d\varphi=N(=1,2,\ldots), \tag{3.22}$$

从而重现了第二上同调群的整性。

规范不变变量 ξ_j 的量子对应是角动量的分量；更准确地说（参见第 1.3 节），

$$M_j=\frac{1}{2}a^*\sigma_j a\ \Rightarrow [M_3,M_\pm]=\pm\hbar M_\pm,\ [M_+,M_-]=2\hbar M_3 \tag{3.23}$$

其中 $M_\pm=M_1\pm iM_2=a^*\sigma_\pm a\,(M_+=a_1^*a_2,\ M_-=a_2^*a_1)$。

3.3 $\mathbb{C}^2$ 作为一个超 Kähler 流形

就在那时，我感受到电路闭合，产生的火花形成了 i、j 和 k 之间的基本方程⋯

——W.R. Hamilton, 写给 P.G. Tait 的信, 1858 十月

四元数 (Quaternions) 为实四维空间 $\mathbb{R}^4$ 提供了非交换范数星除法代数的结构。我们定义

$$q=q^0+q^1I+q^2J+q^3K,\ q^*=q^0-q^1I-q^2J-q^3K,$$
$$I^2=J^2=K^2=IJK=-1\Rightarrow qq^*=q^*q=|q|^2=\sum_{\mu=0}^{3}(q^\mu)^2. \tag{3.24}$$

虚四元数单位 I,J,K 可以定义为 $\mathbb{R}^4$ 中的算子（实矩阵）I_L,J_L,K_L，它们提供了 $\mathfrak{su}(2)$ Lie 代数的实表示：

$$Iq=-q^1+q^0I-q^3J+q^2K,\ Jq=-q^2+q^3I+q^0J-q^1K,$$
$$Kq=-q^3-q^2I+q^1J+q^0K$$

$$\begin{gathered}\Rightarrow I_L=\begin{pmatrix}-\epsilon & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\epsilon\end{pmatrix}=-\mathbf{1}\otimes\epsilon,\ \mathbf{1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\\ \epsilon=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}(=i\sigma_2);\\ J_L=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&-\sigma_3\\ \sigma_3&\mathbf{0}\end{pmatrix}=-\epsilon\otimes\sigma_3,\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix};\\ K_L=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&-\sigma_1\\ \sigma_1&\mathbf{0}\end{pmatrix}=-\epsilon\otimes\sigma_1,\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{3.25}$$

右乘 I,J,K 得到另一组算子 I_R,J_R,K_R，它们与 I_L,J_L,K_L 对易；这六个算子生成 Lie 代数 $\mathfrak{so}(4)\simeq\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$。

可以在 $\mathbb{C}^2\sim\mathbb{R}^4$ 中引入一个复辛形式，设为

$$\Omega=\omega_J+i\omega_K,\ \omega_J=dz_1\wedge dz_2-d\bar z_1\wedge d\bar z_2,\ \omega_K=dz_1\wedge d\bar z_1+dz_2\wedge d\bar z_2. \tag{3.26}$$

将 $(dz_1,dz_2,d\bar z_1,d\bar z_2)$ 视为 $\mathbb{R}^4$ 上（平凡）余切丛中的基，可以写为：

$$\begin{gathered}\omega_J=\tfrac{1}{2}(dz,d\bar z)\wedge J\begin{pmatrix}dz\\ d\bar z\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}\epsilon&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&-\epsilon\end{pmatrix}=\sigma_3\otimes\epsilon,\ dz=(dz_1,dz_2);\\ \omega_K=\tfrac{1}{2}(dz,d\bar z)\wedge K\begin{pmatrix}dz\\ d\bar z\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\ -\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}=\epsilon\otimes\mathbf{1}.\end{gathered} \tag{3.27}$$

这里 ω_J 是一种类型为 $(2,0)+(0,2)$ 的全纯形式，而 ω_K 是一种类型为 $(1,1)$ 的形式，相对于由 K 定义的复结构。另一方面，形式 Ω (3.26) 是在 $\mathbb{R}^4$ 的复化 $\mathbb{C}^4$ 中相对于复结构 I 的一种类型为 $(2,0)$ 的全纯形式。这意味着

$$\Omega(X,(1+iI)Y)=0,\ \forall X,Y\in T\mathbb{C}^4. \tag{3.28}$$

练习 3.3 使用恒等式

$$(J+iK)(1+iI)=0. \tag{3.29}$$

推导出 (3.28)。注意，虽然实四元数代数 $\mathbb{H}$ 没有零因子，但上述例子表明其复化承认这种因子：(3.29) 左侧的两个因子都不为零，而它们的乘积却恒等为零。

我们观察到，形式 (3.26) 可以在 I-全纯坐标中写成明显的 $(2,0)$ 形式：

$$\Omega=dw\wedge dz \text{ for } w=z_1-i\bar z_2,\ z=z_2+i\bar z_1. \tag{3.30}$$

我们现在准备给出一个一般定义。一个光滑流形 M 被称为*超复结构 (hypercomplex)*，如果其切丛 TM 配备了三个（可积的）复结构 I,J,K，它们满足 (3.24) 中的四元数关系。此外，如果 M 配备了一个 *Riemann 度量 (Riemannian metric)* g，并且对于 I,J,K 来说是 *Kähler 度量 (Kähler metric)*，即它们与 g 相容并且满足

$$\nabla I=0,\ \nabla J=0,\ \nabla K=0, \tag{3.31}$$

其中 ∇ 是 Levi-Civita 联络，那么流形 (M,I,J,K,g) 被称为*超 Kähler 结构*。这意味着 ∇ 的*和乐 (holonomy)* 位于四元数 Hermite 自同构的群 $Sp(2n)(=Sp(n,\mathbb{H}))$ 之内。

反之亦然：一个 Riemann 流形是超 Kähler 流形，当且仅当其和乐包含在 $Sp(2n)$ 中。这个定义在微分几何中是标准的。（在物理学文献中，有时假设超 Kähler 流形的和乐恰好是 $Sp(n)$，而不是其真子群。在数学中，这样的超 Kähler 流形被称为*单纯超 Kähler 流形 (simple hyperkähler manifolds)*。在代数几何中，由于著名的 Calabi-Yau 定理，“超 Kähler” 一词基本上是 “全纯辛” 的同义词。超 Kähler 流形的概念相对较新：它是在 1978 年（比 Bargmann 的论文晚 16 年）由 Eugenio Calabi 引入的。

上述超 Kähler 空间 $\mathbb{C}^2$ 与 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的正则伴随轨道密切相关：

$$-\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix}=a^2+bc=\lambda\neq 0 \tag{3.32}$$

半单复 Lie 群的（共）伴随轨道的超 Kähler 结构及其相关的 Nahm 方程已被研究了二十多年——参见 [Kr], [K96]，以及讲座 [Bi] 和其中的参考文献。

4 其它方法：从 Weyl 到 Kontsevich

我们忽略了量子理论中最重要的主题之一：路径积分方法，这需要另一组类似规模的讲座。这样的讲义的 94 页预印本可在 [Gr] 中找到，其中包括 93 个参考文献（截至 1992 年），涵盖了 Dirac (1933) 和 Feynman[29] (1948) 的开创性工作。推荐阅读 [ZJ] 作为对该*主题的高度可读的介绍*。有关该领域的最新发展，参见 [W10]。

相反，我们在第 4.1 节简要介绍形变量子化的历史，从现代发展的先驱者开始。（从更扩展的观点出发，并将路径积分与星指数关联起来——见 [S98]，第 II.3.2.1 节——可以假装将路径积分方法纳入形变量子化的广阔领域。）

[29] Richard Feynman (1918-1988) 于 1965 年与 Julian Schwinger (1918-1994) 和 Sin-Itiro Tomonaga (1906-1979) 共享诺贝尔物理学奖。

4.1 相空间中的量子力学

预量子化存在于相空间中——就像其经典前身一样。然而，极化或最大一组对易观测量的选择，在某种意义上打破了相空间变量之间的对称性。这是不可避免的吗？1927 年，在量子力学和 Heisenberg 不确定关系出现后，Hermann Weyl [We] 确实提出了一种相空间量子化的形式，在这种形式中，坐标和动量被同等对待。Weyl 将任何经典观测量，即相空间上的任何（光滑）函数 f，映射到 Hilbert 空间中的算子 $U[f]$，该空间提供了正则对易关系的 *Heisenberg-Weyl* 群的表示。在坐标为 (p,q) 的二维 Euclid 相空间的最简单情况下，Weyl 变换表示为：

$$U[f]=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\cdots\int f(q,p)e^{\frac{i}{\hbar}(a(Q-q)+b(P-p))}\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b. \tag{4.1}$$

这里，P 和 Q 是 Heisenberg Lie 代数的生成元（满足正则对易关系），因此 $g(a,b,c):=e^{i(\frac{aQ+bP}{\hbar}+c)}$ 是相应的 Heisenberg-Weyl 群的元素（由 Weyl 引入，并由数学家与 Heisenberg 的名字相关联），满足以下组合律：

$$g(a_1,b_1,c_1)g(a_2,b_2,c_2)=g(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2+\frac{1}{2}(a_1b_2-a_2b_1)). \tag{4.2}$$

给定任何群表示 $U[g]$，算子 $U[e^{i(\frac{aq+bp}{\hbar}+c)}]$ (4.1) 将给出群元素 $g(a,b,c)$ 的表示。

Weyl 映射还可以用算子的积分核矩阵元来表示，

$$\langle x|U[f]|y\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{h}\;e^{ip(x-y)/\hbar}\;f\left(\frac{x+y}{2},p\right). \tag{4.3}$$

上述 Weyl 映射的逆映射是 *Wigner* 映射 *(Wigner map)* [W32]，它将算子 Φ 还原为原始的相空间核函数 f，

$$f(q,p)=2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\;e^{-2ipy/\hbar}\;\langle q-y|U[f]|q+y\rangle\,. \tag{4.4}$$

对于一个纯态的波函数 $\psi(x)$，相应的相空间中的 Wigner 拟概率分布 *(quasi-probability distribution)* 给出为

$$F(x,p):=\frac{1}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x+y)\psi(x-y)e^{2ipy/\hbar}\,dy \tag{4.5}$$

需要“拟”这个限定词，因为分布 $F(x,p)$ 可能会产生负概率。我们参考 [M86], [Fe]（其中考虑了更一般的非正分布-见下文）以及有趣的历史概述 [CZ] 来解释 Heisenberg 不确定关系如何反映在相空间形式中，并防止在适当使用 Wigner 分布函数时出现物理悖论。习惯于量子力学标准 Hilbert 空间形式的人可能仍然会想知道，为什么要处理这样一种奇怪的形式，在这种形式中验证概率的基本性质如正性需要复杂的论证。是否有问题的解决方案会促使使用相空间图景？出乎意料的是，这个问题的肯定答案来自于量子力学之外。稍加思考就会告诉我们，如果我们将 q 视为时间坐标，将 p 视为频率，那么 Wigner 函数可能比仅仅具有频率的概率密度更好地表征一段音乐（或更一般的声音信号）。事实上，从 1980 年代开始，Wigner 分布在信号处理中的应用已经成为一个行业——参见专著 [MH] 及其中的参考文献。关于量子力学的退相干历史方法的应用——参见 [GH] 及其中引用的早期工作的参考文献。

Wigner 分布 (4.5) 是实的，并且具有以下性质：如果对 p 或 x 积分，它会给出相对于未积分变量的标准量子力学（正）概率密度；例如，

$$\int F(x,p)dp=|\psi(x)|^2 \tag{4.6}$$

Raymond Stora（私人通信）提出了另一个简单公式，用于表示与（正）密度算子 ρ 和一对（归一化的）本征态 $|\alpha\rangle,|\beta\rangle$ 相对应的拟概率分布 $F=F_\rho$，这些本征态由两个（通常不对易的）Hermite 算子的本征值标记，并且该公式也满足这些关系：

$$F_\rho(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\rho|\alpha\rangle+\langle\alpha|\rho|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle);\sum_\beta F_\rho(\alpha,\beta)=\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \tag{4.7}$$

这个公式适用于诸如在两个正交轴上的自旋投影这样的算子，其本征值不属于仿射空间，因此 Wigner 的表达式 (4.4) 将没有意义。负概率的出现是所有与 Bell 定理一致的拟概率分布的共同特征[30]（如 [M86] 和 [SR] 等讨论）。第一个考虑负概率（在量子理论背景下）的人不是别人，正是 Dirac。在他的 Bakerian 讲座 [D42]（第 8 页）中，他指出"负能量和负概率不应被视为无稽之谈。它们在数学上是定义明确的概念，就像负的钱一样......"。Wigner 变换具有额外的性质，即是 Weyl 变换的逆，而 Weyl 变换与 Weyl 的（对称）排序有关。然而，这种排序（或任何其他排序）并不是神圣不可侵犯的。如前所述——参见脚注 16——在一些可积系统的量子化中，自然会出现 Lax 排序，而不是 Weyl 排序。

利用正则对易关系的 Weyl 形式 (4.2) 和 Weyl 对应，von Neumann[31] 于 1931 年证明了 Hilbert 空间中 Schrödinger 表示的基本唯一性 [vN31]（参见 [vN], [V58]）。为了完整性，他研究了算子乘法的映像，发现了定义相空间观测量非交换组合的卷积规则——一种早期版本的 $\star$-积。事实上，一旦有了 Weyl 映射 $f \to U[f]$ 及其逆映射，并且知道算子乘积 $U[f]U[g]$，我们可以将星积 $f \star g$ 定义为 $U[f]U[g]$ 的 Wigner 映像。结果是：

$$f \star g = \int \frac{dx_1 dp_1}{\pi\hbar} \int \frac{dx_2 dp_2}{\pi\hbar} f(x+x_1, p+p_1) g(x+x_2, p+p_2) \exp\left(\frac{2i}{\hbar}(x_1 p_2 - x_2 p_1)\right). \quad (4.8)$$

事实上，Weyl 和 Wigner 引入他们的映射是为了不同的目的，并且他们都没有注意到它们是彼此的逆映射，也没有想到在相空间中定义一个非交换的星积。这是在第二次世界大战期间由两位年轻的新人独立完成的（详情参见 [CZ], [ZFC]）。

第一位是荷兰物理学家 Hilbrand（Hip）Groenewold（1910-1996）。在 1934-1935 年访问剑桥与 John von Neumann 讨论经典力学和量子力学之间的联系之后，他在战争期间辗转于格罗宁根、莱顿、海牙、De Bilt 以及荷兰北部的几个地方，1946 年在比利时物理学家 Léon Rosenfeld（1904-1974）的指导下于乌得勒支大学获得博士学位。直到 1951 年，他才在母校格罗宁根获得理论物理学职位。他的论文 [G46] 奠定了相空间量子力学的基础。这篇论文首次将 Weyl 对应理解为可逆变换，而不是不满意的量子化规则。值得注意的是，这项工作定义了（并认识到其重要性）星积，这成为该理论形式的基石，讽刺的是，它通常也与 Moyal 的名字相关联，即使它并没有出现在 Moyal 的论文中，也没有被 Moyal 完全理解。此外，Groenewold 首先理解并证明了 Moyal 括号与量子对易子的同构关系，因此后者不能如 Paul Dirac 所设想的那样忠实地对应于 Poisson 括号。这一观察和他对比 Poisson 括号和对易子的反例已经被推广和编纂为现在所知的 Groenewold - Van Hove 定理。

星积的另一位共同发现者 José（Jo）Moyal（1910-1998）出生于耶路撒冷，当时属于奥斯曼帝国，并在巴勒斯坦度过了大部分青年时期。在法国和英国学习并在巴黎研究湍流和气体扩散后，他在 1940 年德国入侵时逃到伦敦（在物理学家/作家 C.P. Snow（1905-1980）的帮助下）。在 Hartfield 从事飞机研究期间，Moyal 发展了关于量子力学统计性质的思想，并与 Dirac 进行了激烈的讨论[32]，尽管 Moyal 发现并写信给 Dirac 指出 Wigner（Dirac 的连襟）构建了这样的函数，Dirac 仍拒绝相信存在一个"分布函数 $F(p,q)$，能够正确给出任何 $f(p,q)$ 的平均值"。Moyal 最终在 [M49] 中发表了他的工作，比 Groenewold 晚了三年。在接下来的 15 年中，该主题的后续工作重现于 [ZFC]。在 [BFLS] 的工作激发了数学家对形变量子化的兴趣之后，又过了十五年该主题才引起更广泛的关注。即使如此，只有对 Moyal 的引用大幅增加，而 Groenewold 的工作仍很少被提及（例如，[G46] 并未包括在 2008 年形变量子化综述 [B08] 的 78 个参考文献中）。

4.2 Poisson 流形的形变量子化

量子化研究的自然起点是 *Poisson 代数 (Poisson algebra)* $\mathcal{A}$——即一个具有 Poisson 括号的结合代数，该 Poisson 括号产生 Lie 代数结构并作为 $\mathcal{A}$ 上的导数（遵循 Leibniz 规则）。在经典相空间的情况下，这是 Poisson 流形上函数的（交换）代数。目标是将交换积变形为依赖于 $\hbar$ 的非交换星（$\star$）积，以使星对易子在 $\hbar$ 的高阶项中再现 Poisson 括号：

$$f \star g - g \star f = i\hbar\{f, g\} + O(\hbar^2) \quad (4.9)$$

[30]关于对 Bell 定理的一种"概率反对"的解释——参见 [Kh]。

[31]出生于匈牙利的杰出数学家和博学多才的 John von Neumann (1903-1957) 在多个领域做出了重大贡献。在他提交给美国国家科学院的一份关于他生活的简短事实清单中，他说："我认为我工作中最重要的部分是量子力学，这在 1926 年在哥廷根发展起来，随后在 1927-29 年在柏林发展起来。另外，我在各种形式的算子理论上的工作，柏林 1930 年和普林斯顿 1935-1939 年。"——参见 [V58]。

[32]1944 年 2 月-1946 年 1 月，重现于 Ann Moyal *Maveric Mathematician* ANU E Press, 2006 (在线)。

形变量子化 *(deformation quantization)* 是计算和研究一种结合星积 *(associative star product)*，定义为 $\hbar$ 的形式幂级数：

$$f \star g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n B_n(f,g), \tag{4.10}$$

其中 B_n 是双微分算子 *(bidifferential operators)*（在每个参数上都是微分算子的双线性映射），并且 B_1 受 (4.9) 的限制。给定乘积 (4.10)，我们可以通过双线性和$\hbar$-进连续性 *($\hbar$-adic continuity)* 将其扩展到参数 $\hbar$ 的形式幂级数 *(formal power series)* 代数 $\mathcal{A}[[\hbar]]$（系数在 $\mathcal{A}$ 中）：

$$(\sum_{n\geqslant 0} f_n \hbar^n) \star (\sum_{n\geqslant 0} g_n \hbar^n) = \sum_{k,l\geqslant 0,\, m\geqslant 1} B_m(f_k, g_l) \hbar^{k+l+m}. \tag{4.11}$$

人们考虑 [W94] 规范变换 *(gauge transformation)* $G(\hbar) : \mathcal{A}[[\hbar]] \to \mathcal{A}[[\hbar]]$，它们保留原始的 Poisson 代数 $\mathcal{A}$；换句话说，$G(\hbar) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} G_n \hbar^n$，其中 G_n 是（线性）微分算子。如果两个星积 $\star$ 和 $\star'$ 通过规范变换不同，即如果

$$\sum_{j+k+l=n} B_l(G_j(f), G_k(g)) = \sum_{l+m=n} G_m(B_l'(f,g)),\ n = 1, 2, ... \tag{4.12}$$

它们就是等价的。问题如 [BFLS] 中所述（参见 [W94]），是找到星积存在的（上同调）条件，并将所有这些乘积按规范等价分类。

首先，我们注意到，根据 [K]，星积的结合性意味着级数 (4.10) 的第一个双微分算子 B_1 满足以下关系：

$$fB_1(g,h) - B_1(fg,h) + B_1(f,gh) - B_1(f,g)h = 0 \tag{4.13}$$

如果我们将 B_1 视为线性映射 $B_1 : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，那么方程 (4.13) 表明它是代数 $\mathcal{A}$ 的上同调 Hochschild[33] 复形的 2-上闭链（定义见 [K] 的第 3.2.4 节）。此外，通过适当的规范变换可以消去 B_1 的对称部分（见 [K] 第 1.2 节），从而得到 $B_1(f,g) = \frac{i}{2}\{f,g\}$——这是 (4.9) 的结果。更一般地，在尝试递归构建 B_n 时，会发现每个阶段都有一个形式为 $\delta B_n = F_n$ 的方程，其中 F_n 是先前确定的低阶项的二次表达式。在规范等价问题中，每个 G_n 都会出现类似的方程。算子 δ 从双线性到三线性（或从线性到双线性），正是代数 $\mathcal{A}$ 的 Hochschild 上同调中以 $\mathcal{A}$ 为值的上同调算子（参见 [W94]）。

最简单的星积例子是由 Groenewold-Moyal 积 (4.8) 给出的，它是根据具有常系数的 Poisson 双向量 $\mathcal{P}$（第 2.1 节）定义的，该双向量存在于仿射相空间中。具体形式为：

$$B_n(f,g) = \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\mathcal{P}^{jk}\frac{\partial}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial z^k}\right)^n f(y)g(z)\bigg|_{y=z=x}. \tag{4.14}$$

练习 4.1 验证（使用 (4.9)、(4.10) 和 (4.14)）以下关系

$$pq = \frac{1}{2}(p \star q + q \star p) = qp\ (q \star p - p \star q = i\hbar). \tag{4.15}$$

备注 4.1 在大多数数学文本中，包括 [K]，(4.9) 和 (4.14) 中的 i-因子是缺失的。（Bourbaki 研讨会 [W94] 是一个值得庆幸的例外。在那里也提到了使用复共轭的奇偶性条件 *(parity condition)* $B_n(f,g) = (-1)^n \bar{B}_n(g,f)$。）为了使公式符合物理文本，需要将形式展开参数替换为 $i\hbar$。如果在几何量子化的一些创始人的著作中出现类似的差异可以被视为疏忽，那么在形变量子化的情况下，这似乎是一个有意的选择。Kontsevich 在 [K] 中提出了以下有些隐晦的备注 *1.5*：

[33]Gerhard Hochschild (1915-2010)，Claude Chevalley (1909-1984) 在普林斯顿的学生，于 1945 年引入了 Hochschild 上同调。

一般来说，应该考虑具有复系数的双微分算子⋯。在本文中，我们处理纯形式的代数性质⋯并且主要在实数域 $\mathbb{R}$ 上工作⋯。目前尚不清楚，对于一般的 *Poisson* 括号，“形变量子化”的自然物理对应物是否是通常的量子力学。对于非退化括号，即对于辛流形，情况确实如此，但我们的结果表明，一般来说，一个拓扑开弦理论更为相关。

如果 Poisson 双向量 $\mathcal{P}$ 具有恒定秩，那么根据 Lie 的经典定理（引用于 [W94]），Poisson 流形在局部上同构于具有恒定 Poisson 结构的向量空间。因此，这种正规 *Poisson* 流形 *(regular Poisson manifold)* 是局域形变量子化的。如果存在无挠线性联络使得 $\mathcal{P}$ 是协变常数，则局域量子化可以相对容易地拼接在一起 [BFLS]。更困难的问题是证明对于不允许平坦无挠 Poisson 联络的任意辛流形的形变量子化的存在性，这一问题在 1980 年代被 de Wilde 和 Lecomte 以及 Fedosov 解决了（综述见 [W94] 和 [B08]）。Weinstein 在他的 Bourbaki 研讨会演讲 [W94] 中以提出一个基本问题结束：“每个 *Poisson* 流形都是可形变量子化的吗？”。三年后，Kontsevich [K] 不仅对这个问题给出了肯定的回答，而且提供了任何 Poisson 流形的星积等价类的规范构造。这一成果被列入他对几何四个问题的贡献之中，并因此在 1998 年柏林获得了菲尔兹奖。该工作的量子场论根源在 Cattaneo 和 Felder 的一系列论文中得到了展示（见 [CF] 及其中引用的早期工作）。

正如 [GW] 强调的那样，星积中涉及的形式幂级数的收敛性问题仍然仅在个别情况下进行研究。

这个主题的生命力在于不断涌现的有趣论文——例如参见 [C07], [CFR], [LW] 等。

5 二次量子化

...... 没有什么能给鉴赏家带来比这更大的乐趣了，...... 即使他是一位历史学家，在回顾过去时也会伴有淡淡的忧伤。快感来自幻觉和远不明确的意义；一旦幻觉消散，获得了知识，人们就会变得无动于衷...... 这种理论的雄伟之美不再吸引我们。

——1940 年 André Weil（从法国监狱写给妹妹 Simone）关于数学中的类比的一封信，
Notices of the AMS **52**:3 (2005) 334-341 (p.339).

发明二次量子化的故事，就是理解“量子化物质波”，并最终创立量子场论的故事。追随量子场论的早期阶段（有了像 [Dar] 这样的指南），我们就能体会到创始者们的哲学倾向，而这些倾向似乎已不再符合我们这个时代的精神。它还可以揭示我们当前的一些忧虑（[S10]）。但首先，我们认识到，要接受一些现在看来是常识的想法是多么困难。其中一个这样的想法是由 Jordan 在 1927 年提出的（根据 Pauli 的模糊建议——见 [Dar]，第 230 页，脚注 75 和 76），并在年底由 Jordan 和 Wigner[34]完善（同上，第 231-232 页及 [JW28]），即引入了规范反对易关系

$$[a_i, a_j]_+ := a_i a_j + a_j a_i = 0 = [a_i^*, a_j^*]_+ \quad [a_i, a_j^*]_+ = \delta_{ij} \tag{5.1}$$

作为 Fermi 统计的基础（实际上是电子-正电子场的量子化基础）。接受规范反对易关系的困难在于，它们似乎违反了对应原理：当 $\hbar \to 0$ 时，它们变成严格反对易（Grassmann）变量，这是在经典系统中从未遇到过的。Jordan 发明“二次量子化”一词是很自然的，因为他正在量子化（已经是量子的）Schrödinger 波函数（见附录）。另一方面，Dirac 关心的是量子化一个经

[34]Jeno（后来的 Eugene）Wigner（布达佩斯，1902 - 普林斯顿，1995）相对较晚（在 1963 年）获得了诺贝尔物理学奖，“因为⋯⋯发现和应用了基本对称性原理”。

典系统：电磁辐射场，[D27]。这有助于我们理解为什么即使是 Fermi-Dirac 统计的共同发现者 Dirac 也不准备接受这种概念。1927 年在索尔维会议上，他 "从一般角度认为 [Jordan-Wigner 的量子化] 非常人为"（见 [Dar]，第 239 页）。将近半个世纪后，Dirac 回忆说："Bose 统计 ⋯⋯ 与谐振子组合有关。Fermi 统计没有这样的图像，我觉得这是一个严重的缺陷。"（见 [D]，第 140 页）。如果 Dirac 将规范反对易关系应用于他出色的相对论波动方程，他就不需要 "充满负能量状态的无穷海洋[35]"。事实上，Jordan 预见了*自旋统计定理 (spin statistics theorem)*（该定理表明整数自旋场局部对易，而半整数自旋场局部反对易），这个定理在大约 12 年后由 Markus Fierz（1912-2006）和 Pauli 提出和证明（关于这个定理的教学讨论、历史和理解，见包含五十多个原始参考文献的 20 页长论文 [DS]，可电子获取）。

二次量子化的数学表述简洁而优雅（并且，按照上述 Weil 信件的精神，隐藏了许多兴奋点）。狭义上量子化 Schrödinger 波函数的二次量子化可以看作是从单个粒子的量子描述得到多粒子系统的量子描述的一种尝试。首先从单粒子 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 出发，构造对称（或反对称）张量代数 $S(\mathcal{H})$（或 $A(\mathcal{H})$，并将其完备化以形成 Bose 子（或 Fermi 子）的 *Fock 空间 (Fock space)*[36] $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{H})$。更一般地，有一个函子，称为*二次量子化 (second quantization)*，从 Hilbert 范畴到自身，它将每个 Hilbert 空间映射到其 Fock 空间，并将每个幺正算子 U 映射到一个由 U 的张量积构成的显然的幺正映射。

以下是一个由 Bernard Julia 在 1989 年 Les Houches 冬季数论与物理学学校上提出的 Bose Fock 空间的示例，它成为一个有趣的数学发展的起点 [BC]（这一发展仍在继续 [CC]）。引入对应于质数的（Bose）产生和湮灭算子 $a_p^{(*)}$，其中 $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$。单粒子态空间由对应于质数的（单位）矢量 $|p\rangle$ 生成，而 Fock 空间 $\mathcal{F}$ 则由对应于所有正整数的矢量 $|n\rangle$ 生成：

$$|vac\rangle \equiv |1\rangle\,, \quad |n\rangle = \frac{\prod (a_i^*)^{n_i}}{\prod (n_i!)^{\frac{1}{2}}} |1\rangle \quad \text{for} \quad n = \prod (p_i)^{n_i}\,. \tag{5.2}$$

因此，真空对应于数字 1；态 $|4 = 2^2\rangle, |6 = 2 \times 3\rangle, |9\rangle, |14\rangle, \ldots$ 是双粒子态，等等。*数算符 (number operator)* N 满足 $(N - n)|n\rangle = 0$，在乘积态上以乘法作用：

$$N := \prod_p p^{a_p^* a_p} \quad \Rightarrow N|p_1 \ldots p_k\rangle = p_1 \ldots p_k |p_1 \ldots p_k\rangle\,. \tag{5.3}$$

如果进一步引入一个在乘积态上可加的对数 Hamilton 量，那么对应于逆温度 β 的系统的配分函数将是 Riemann ζ 函数：

$$H = \ln N \quad \Rightarrow \quad Z(\beta) := \mathrm{tr}_{\mathcal{F}}(e^{-\beta H}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta} = \zeta(\beta) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\beta}\right)^{-1}\,. \tag{5.4}$$

备注 5.1 与其使用单粒子空间的对称或反对称张量积，我们可以使用更高维的不可约表示来表示置换群，这对应于更一般的*置换群 (permutation group)* 或 *Para 统计 (parastatistics)*，它们出现在代数 Doplicher-Haag-Roberts 方法对局部量子物理的超选择定则分类中（综述见 [H]）。通过引入一些额外的自由度和*规范对称性 (gauge symmetry)*，可以将它们简化为熟悉的 Bose 和 Fermi 统计（通过所谓的 *Green 假设 (Green ansatz)*）。

Fock 空间构造对于自由量子场论以及非相对论量子力学都能很好地工作，只要 Hamilton 量与粒子数对易。张量积构造即使在处理非相对论束缚态问题时也是不适用的。确实，考虑

[35]精确的数学描述 *Dirac 海 (Dirac sea)*，相当于现在标准的 Fermi 场量子理论，最近才被给出，[D11]。

[36]圣彼得堡物理学家 Vladimir Fock（1898-1974）还因其发展 Hartree-Fock 方法及其相对论对应的 Dirac-Fock 方程而闻名，这导致了 Dirac-Fock-Podolsky 在量子场论上的工作，这是 Tomonaga 因涉及无限多个时间的公式获得 Nobel 奖的前奏。他开创性的工作 [F32] 在学生的论文 [CF09] 中被恰当地引用，但在主要论著 [Sch] 的参考文献列表中奇怪地缺席。

两个 Galileo 不变粒子的态空间的张量积。根据 Bargmann 的一篇经典论文 [B54]，Galileo 群的量子力学射线表示涉及到其由质量算符引起的中心扩张。因此，两个单粒子表示的张量积的质量等于两个粒子的质量之和，应该保持守恒。另一方面，我们知道束缚态的质量由于（负的）结合能[37]（除以 c^2）与组成部分质量之和不同。通过考虑伽利略不变性所暗示的能量守恒，也可以得出类似的矛盾。这个例子表明，在存在相互作用的情况下，应考虑非平凡的余积 *(coproduct)*，使得像总能量这样的对称生成元不一定是可加的。虽然有许多作者探讨了第二量子化的 Hopf 代数变形（参见例如 [CCT]），但我并不清楚有任何工作以这种方式处理物理束缚态问题。

致谢 我衷心感谢 IHES 在 2011 年 1 月和 12 月，以及 CERN 理论部在 2012 年 2 月和 3 月期间对我工作的热情款待。很高兴感谢 Peter Dalakov、Petko Nikolov 和 Raymond Stora 在本工作不同阶段提供的有益建议，并感谢 Hristina Hristova 在准备笔记时的帮助。作者的工作部分得到了保加利亚国家科学基金会资助项目 DO 02-257 的支持。

[37]这条注释延续了由关于该主题的 Scholarpedia 文章引发的讨论。

附录：Pascual Jordan (1902-1980)

在量子力学的创造者中，*Pascual Jordan* 无疑是最不为人所知的，尽管他对量子场论的诞生做出了比任何人都多的贡献。

——Olivier Darrigol [Dar]

Pascual Jordan 出生于汉诺威的一个德西混合家庭，自然科学方面的阅读广泛。14 岁时，他梦想着写一本“关于所有科学领域的大书”。在文理中学期间，他自学了微积分，并仔细研究了 Mach 的《力学》和《热力学原理》[38]。由于对汉诺威工业高等学校的物理教学不满意，他于 1923 年搬到了哥廷根。那里（实验）物理课的时间太早，他在 1963 年接受 T.S. Kuhn 采访时回忆道，他成了一名“从未听过物理课的物理学家”。相比之下，他成了 Richard Courant（1888-1972）的积极学生，并协助他撰写了著名的《Courant-Hilbert 数学物理方法》书中的部分内容。在遇到新任哥廷根理论物理研究所所长 Max Born（1882-1970）后，Jordan 才决定将物理学作为自己的追求方向。“他是……除了我的父母之外，对我的生活产生最深远、最持久影响的人”，Jordan 在 Born 去世后的一篇简短悼词中写道（[Sch]，第 7 页）。起初，他只是通过在 Born 的《晶格动力学百科全书》文章手稿中插入公式来帮助他的老师（见 [MR]，脚注 60），但很快他就开始自己研究当时热门的光量子问题（从他 1924 年的论文开始）。1925 年初，他能够预测氖中的两条新谱线的存在（不久后由 Hertz 观察到[39]——那是新发现层出不穷的时代！）。

Jordan 在 1925-1928 年的活动真是令人惊叹：在波恩度假期间，他撰写了他们文章的初稿（在 Heisenberg 提交两个月后提交）。接着是与 Born 和 Heisenberg 合作的著名“三人论文”，于 11 月提交，其中 Jordan 是唯一负责辐射理论部分的人。仿佛这还不够，年末他提交了一篇关于“Pauli 统计”的论文；《物理学杂志》的编辑 Max Born 在前往美国讲学的途中带上了这篇论文，然后……直到六个月后回到哥廷根时才想起来。在此期间，Fermi 和 Dirac 独立发现了其结果[40]。在 [PJ07] 的书目中（第 175-206 页），可以找到 Jordan 参与的 8 个题目（包括一本书），它们发表在 1926 年，15 个发表在 1927 年，6 个发表在 1928 年。其中两个涉及变换理论 *(transformation theory)*（一个是 1926 年，另一个是 1927 年，Jordan 在印刷版中感谢 Dirac 邮寄给他的手稿[41]）。这项工作实际上奠定了量子力学的数学和物理基础。其他五篇论文中，前两篇由 Jordan 单独撰写 [J27]，其余三篇分别与 Oskar Klein（1894-1977）[JK27]、Wigner（见脚注 33）[JW28]（关于 Fermi 子的正则反对易关系），以及最终与 Pauli 共同撰写——也是 1928 年的，涉及到二次量子化的概念，或者换句话说，是对波动场的量子化，从而奠定了量子场论的基础。如今很难完全理解这项工作的创新性和重要性。例如，为什么应该量子化已经量子化的 Schrödinger 方程的波函数？这里有一个意想不到的原因。1920

[38] 奥地利物理学家和哲学家 Ernst Mach（1838-1916）持有强烈的反形而上学观点，影响了他的教子 Pauli（以及年轻的 Einstein）。Jordan 一生都认为自己是 Mach 的弟子，并提到他的实证主义知识论 [Dar]。有关 P. Jordan 的其他资料：[PJ07], [Sch99], [Me], [S06]。

[39] Gustav Ludwig Hertz（1887-1975），1925 年 Nobel 物理学奖获得者（与 James Frank 一起），是发现电磁波的 Heinrich Hertz（1857-94）的侄子。

[40] 引用 Stanely Deser 的话（见 [S06]），我们本可以将 Fermi 子称为“Jordan 子”……Jordan 自己使用了“Pauli 统计”一词。半个世纪后的 Jordan 在 [J] 中回忆说，“在早期讨论中，[Pauli] 拒绝了显而易见的扩展其法则适用范围的想法。后来，作为 Fermi-Dirac 统计的一部分，它成为物理学中的一个……基本法则。”（没有提及他的优先权！）

[41] 正如 Schroer 在 [S06] 中指出的，还有一个几乎被遗忘的贡献者，Fritz London（1900-1954），他以研究氢分子和超导性而闻名；London 是第一个在 1926 年引入量子力学中的 Hilbert 空间概念的人。

年代末仍困扰物理学家的问题是波函数的物理解释。1926 年，Schrödinger 试图给他的波赋予现实的物理意义，将其模平方 $|\psi|^2$ 看作是一种电子物质的密度（[Dar]，第 237 页）。这种解释的一个障碍（由专家评论家 Pauli 提出）是引入多维配置空间以处理多体问题的必要性。将 ψ 视为场算符，Jordan 在某种程度上恢复了处理任意（甚至变化的）粒子数的三维图景。此外，Jordan 和 Klein[JK27] 很高兴发现算符形式中的正规排序自然地消除了无限自能项（[Dar]，第 234-235 页）。(第 5 节讨论了更具革命性的 Fermi 子二次量子化及其不易接受的情况。)

那么，为什么 Jordan 没有像他的哥廷根同事那样享有名声呢？他不仅没有获得 Nobel 奖（尽管在 1920 年代后期，Einstein 两次向诺贝尔委员会提名《三人论文》的作者 [S06]），他还是唯一一位没有参加 1927 年辉煌的索尔维会议的量子理论主要贡献者（参加会议的 29 人中有 17 人是或后来成为 Nobel 奖得主——见 [Sch]，第 6 页）；在战后生活的 35 年间，他几乎被遗忘了。导致这种忽视的原因是复杂的：涉及 Jordan 的性格和政治（并反映了我们的社会不仅仅因科学成就而赞扬科学家）。

首先，对于刚到哥廷根的二十岁新手来说，要忍受比他大一两岁的同事 Heisenberg 和 Pauli 的自信和大胆的作风，并不容易。据 Schweber 所述 [Sch]（第 7 页），“Jordan 个子较矮，他的自我表现反映了他的身材。” 此外，他严重口吃，这使他难以与他人交流，并加深了他给人留下的不安全感。Jordan 对数学问题和技术的兴趣（包括研究 *Jordan* 代数 *(Jordan algebra)*[42]，他与 von Neumann 和 Wigner 合作的工作 [JNW]（1934 年）即涉及此领域）并未提高他在物理学家中的人气[43]（甚至在 Nobel 委员会中也没有：即使是伟大的 Poincaré（曾被提名但）也没有获得 Nobel 奖)。正如 Freeman Dyson 所观察到的，如果一个人想获得 Nobel 奖，他必须在他最成功的领域坚持足够长的时间。相比之下，忠于自己 14 岁时拥抱整个科学梦想的 Jordan 在 1930 年代转向了生物学、心理学、地质学和宇宙学的问题。他是二战前最早支持大爆炸假说的科学家之一[44]。因此，如果在 1920 年代末和 1930 年代初，Jordan 缺乏充分的认可可以归因于他自信心不足和他异常广泛的兴趣，那么他在战后被忽视的原因则与他的政治有关。

对屈辱的凡尔赛条约的愤怒以及高额赔款加剧的经济困难，为民族主义情绪的萌生和政治极端主义的崛起提供了肥沃的土壤。再次引用 Schücking 的话 [Sch99]：“Jordan 一直是一个保守的民族主义者，以‘Domeier’的笔名在右翼期刊《德国民族》（Deutsche Volkstum）上发表了他的精英主义观点。我的哥廷根老师 Hans Kopfermann⋯⋯在 1933 年 5 月写信给 Niels Bohr 说：‘非犹太裔年轻科学家中有一种倾向，就是加入这个运动，并尽可能作为一种调解因素，而不是站在旁边表示不满。’” 确实，Hitler 上台后，Jordan 是 850 万加入国家社会主义（NS）党的德国人之一；他甚至参加了其半军事组织冲锋队（SA，即“褐衫队”，在 1934 年对其领导人的“血腥清洗”后变得无关紧要）。与最后一位自由派英国首相 Lloyd George（见 [CMM]）相似，Jordan 认为苏联传播的共产主义是最大的危险，而国家社会主义的德国是唯一的选择。Bert Schroer 在 [PJ07] 中分享了上述观点，认为 Jordan 天真地希望说服 NS 机构中的一些有影响力的人，认为现代物理学（以 Einstein 和尤其是哥本哈根版本的量子物

[42]这是一种非结合代数，其特征在于对称积 $A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$ 满足关系 $A^2 \circ (A \circ B) = A \circ (A^2 \circ B)$ $(A^2 = A \circ A)$。

[43]他的战后学生 Engelbert Schücking[Sch99] 回忆道：“Jordan 被 Pauli 和 Heisenberg 看作是一个数学家而非物理学家”，而“Jordan 先生总是一个形式主义者”，Pauli 曾这样告诉我。相比之下，Jordan 对 Pauli 只有赞扬之词——见他富有洞察力的文章 [J]。

[44]他的宇宙学思想遵循比利时神父兼天文学家 Georges Lemaître（1894-1966）的理论，他发现的红移-距离关系后来被归功于 Edwin Hubble（1889-1953）——见 [WN]。他的理论也受到了 Dirac 1937 年大数假说的启发。Jordan 的贡献在几十年后被重新发现并流行起来（但没有给予原作者应有的荣誉）——见 H. Kragh 在 [PJ07] 中的描述。

理学为代表）是对抗“布尔什维克物质主义”的最佳解药。这一观点得到了 Jordan 的书 [J36] 的证实（书中受到了 Bernhard Bavink[45]的启发，并对其表示赞同）。Bavink 认为现代物理学完全反物质主义，比经典物理学更符合基督教信仰（见 H. Kragh 在 [PJ07] 中的描述及其参考文献）。不出所料，这种观点并不受痴迷于反犹主义的纳粹当局的欢迎。他们接受了 Jordan 的支持，但从未信任他，因为他继续与犹太同事交往，并准备公开赞扬他们。他在相对孤立的罗斯托克小大学度过了 1928-1944 年，并且从未被分配到重要的战争相关任务（例如没有加入党的 Heisenberg）。Jordan 只损害了自己的声誉：战后两年他没有任何工作。Born 拒绝为他作证，在回信中引用了在纳粹统治期间去世的亲属的名字（见 [B05]）。最终，在 Heisenberg 和 Pauli 的帮助下，Jordan 通过了去纳粹化程序（直到 1953 年[46]才被允许指导博士生）。一旦恢复汉堡大学教授职位，他创建了一个强大的广义相对论学派[47]（见 [E09]）。但 Jordan 没有听从 Pauli 远离政治的建议。他反对 1957 年 4 月“哥廷根十八人”签署的反对德国核重整的宣言（由 Born 和 Heisenberg 签署），写了一篇支持 Adenauer 政策的反对文章，声称十八人的行动危及世界和平，破坏了欧洲的稳定。Max Born 对 Jordan 的文章感到恼火，但没有公开反应。（他的妻子没有隐藏她的愤怒：她收集并出版了 Jordan 的旧政治文章，题为“Pascual Jordan，基督教民主联盟的宣传员”。）

1963 年 Nobel 物理学奖获得者 Eugene Wigner 在 1979 年（从普林斯顿）提名他的前同事（及 [JW28] 的合著者）Jordan 获得 Nobel 奖，但无济于事：那年的诺贝尔物理学奖由 Sheldon Glashow, Abdus Salam 和 Steven Weinberg 分享——用 Schücking 的话说，“Jordan 发明的艺术的三位实践者” [Sch99]。

Pascual Jordan 于 1980 年 7 月 31 日在汉堡去世，距离 78 岁生日仅差三个月，仍在研究他的标量-张量引力理论。

[45]德国物理教师、科学哲学家和多产作家（1879-1947）。

[46]民族主义哲学家 Theodor Haering（1884-1964）在纳粹时期因 Jordan 在其书 [J41] 中批评其对现代物理学的晦涩观点而受到批评，但他于 1951 年被恢复名誉。（感谢 K.-H. Rehren 提供此信息。）

[47]他的学生包括 Jürgen Ehlers（1929-2008），他于 1995 年成为新成立的 Max Planck 重力物理研究所（Einstein 研究所）在 Golm（波茨坦）的创始主任，以及在纽约大学结束职业生涯的 Schücking。在汉堡小组的手中，Dirac 关于可变引力常数的思想被转化为仍然流行的标量-张量引力理论，通常归功于 Brans-Dicke（他们的论文写于 1961 年，比 Jordan 晚了两年）。

参考文献

[AE] S.T. Ali, M. Englis, Quantization methods: a guide for physicists and analysts, math-ph/0405065.

[AdPW] S. Axelrod, S. della Pietra, and E.Witten, Geometric quantization of Chern-Simons gauge theory, *J. Diff. Geom.* **33** (1991) 787-902.

[B02] J. Baez, The octonions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**:2 (2002) 145-205; arXiv:math/0105155.

[B06] J. Baez, Categories, quantization and much more, April 12, 2006, available at: http://math.ucr.edu/home/baez/categories.html.

[B09] J. Baez, Torsors made easy, December 27, 2009, available at: http://math.ucr.edu/home/baez/torsors.html.

[Ba] W. Ballmann, Lectures on Kähler Manifolds, European Math. Soc., Publ. House, 2006, 182 pp.

[B54] V. Bargmann, On unitary ray representations of continuous groups, *Ann. of Math.* **59**:1 (1954) 1-46.

[B61] V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I, *Commun. Pure Appl. Math.* **14** (1961) 187-214.

[B62] V. Bargmann, On the representations of the rotation group, Rev. Mod. Phys. **34** (1962) 829-845; in: [QTAM], pp.300-316.

[BFLS] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, Deformation theory and quantization. I, II, *Annals Phys.* **111** (1978) 61-110, 111-151.

[B05] J. Bernstein, Max Born and the quantum theory, *Am. J. Phys.* **73**:11 (2005) 999-1008.

[Bi] R. Bielawski, Lie groups, hyperkaehler metrics and Nahm's equations, in: *Algebraic groups* (edited by Yuri Tschinkel) Proceedings of the Summer School held in Göttingen, June 27 - July 13, 2005, Universitätsverlag Göttingen, Göttingen 2007, pp. 1–17.

[Bl] J. Blackmore (Ed.) *Ludwig Boltzmann His Later Life and Philosophy, 1900-1906* Book One: A Documentary History, Kluwer, Dordrecht/Boston 1995.

[B] Matthias Blau, Symplectic geometry and geometric quantization, http://www.blau.itp.unibe.ch/lecturesGQ.ps.gz.

[B08] M. Bordemann, Deformation quantization: a survey, *J. Phys.: Conf. Ser.* **103** (2008) 012002 (31 pp.).

[BHJ] M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, Zur Quantenmechnik, II. *Zeits. Phys.* **35** (1926) 557-615 (English translation in [SQM]).

[BC] J.-B. Bost, A. Connes, Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, *Selecta Math.* **1**:3 (1995) 411-457.

[Br] Rolf Brendt, *An Introduction to Symplectic Geometry* (Graduate Studies in Mathematics), American Mathematical Soc., 2001.

[CFR] D. Calaque, G. Felder, C.A. Rossi, Deformation quantization with generators and relations, arXiv:0911.4377v2 [math.QA].

[CdS] Ana Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics **1764**, Springer 2001, 2008; available at:
http://www.math.ist.utl.pt/ acannas/Books/lsg.pdf.

[CMM] D. Castillo, C. Magaña, S. Molina, The 1920 ‘s,
http://www.history.ucsb.edu/faculty/marcuse/ classes/33d/projects/1920s/.

[CCT] P.G. Castro, B. Chakraborty, F. Toppan, Wigner oscillators, twisted Hopf algebras and second quantization, *J. Math. Phys.* **49** (2008) 082106; arXiv:0804.2936; see also arXiv:1012.5158.

[C07] A.S. Cattaneo, Deformation quantization and reduction, arXiv:math/0701378.

[CF] A.S. Cattaneo, G. Felder, Coisotropic submanifolds in Poisson geometry and branes in the Poisson sigma model, *Lett. Math. Phys.* **69** (2004) 157-175; arXiv:math/0309180.

[CF09] Cheung Hoi Kit, Fok Tsz Nam, History of second quantization, *Introduction to many body theory* Term paper presentation, The Chinese University of Hong Kong, 21 Dec. 2009 (available electronically).

[CC] A. Connes, C. Consani, On the arithmetic of the BC system, arXiv:1103.4672 [math.QA].

[CZ] T.L. Curtright, C.K. Zachos, Quantummecanics in phase space, arXiv:1104.5269 [physics.hist-ph].

[Dar] O. Darrigol, The origin of quantized matter waves, *Hist. Stud. Phys. Sci.* **16**/2 (1986) 198-253.

[deG] M. de Gosson, *Symplectic Methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics*, Birkhäuser, Springer, Basel 2011.

[D11] J. Dimock, The Dirac sea, *Lett. Math. Phys.* **98**:2 (2011) 157-166; arXiv:1011.5865 [math-ph].

[D27] P.A.M. Dirac, The quantum theory of emission and absorption of radiation, *Proc. Roy. Soc. London* **A114** (1927) 243-265.

[D42] P.A.M. Dirac, Bakerian lecture. The physical interpretation of quantum mechanics, *Proc. Roy. Soc. London* **A180** (1942) 1-40.

[D30] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford 1930 (Fourth Edition, 1958).

[D] P.A.M. Dirac, Recollections of an exciting era, in: Charles Weiner, ed., *History of Twentieth Century Physics*, International School of Physics "Enrico Fermi", course **57**, New York 1977, pp. 109-146.

[DS] I. Duck, E.C.G. Sudarshan, Towards an understanding of the spin-statistics theorem, *Am. J. Phys.* **66**:4 (1998) 284-303.

[E09] George Ellis, Editorial note to: Pascual Jordan, Jürgen Ehlers and Wolfgang Kundt, Exact solutions of the field equations of the general theory of relativity, Golden Oldie Editorial, Gen. Relat. Gravit. 41 (2009) 2179-2189.

[Fa] L. Faddeev, Instructive history of quantum inverse scattering method, *Acta Applicanda Mathematicae* **39** (1995) 69-84; C. DeWitt-Morette. J.B. Zuber, (eds.) *Quantum Field Theory: Perspective and Prospective*, Kluwer, Amsterdam 1999, pp.161-178.

[FY] L.D. Faddeev, O.A. Yakubovskii, *Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students*, Student Mathematical Library **47**, Amer. Math. Soc., 2009 (Russian original, Leningrad 1980)

[Fe] R.P. Feynman, Negative probability, in: *Quantum Implications*, Essays in honour of David Bohm, Ed. by B.J. Hiley, F. David Peat, Routledge & Kegan Paul, Londnon and New York 1987, pp. 235-248.

[F] G. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton Univ. Press, Princeton 1989; review: V. Guillemin, *Bull. Amer. Math. Soc.* **22**:2 (1990) 335-398.

[F32] V. Fock, Konfigurazionsraum und zweite Quantellung, *Zeits. Phys.* **75** (1932) 622-647.

[GM] S.I. Gelfand, Y.I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer, Berlin et al 1996, 2003 (original Russian edition: "Nauka", Moscow 1988).

[GH] M. Gell-Mann, J.B. Hartle, Classical equations for quantum systems, *Phys. Rev.* **D47** (1993) 3345-3382; Decoherent Histories Quantum Mechanics with One 'Real' Fine-Grained History, arXiv:1106.0767v3 [quant-ph].

[G46] H.G. Groenewold, On the principles of elementary quantum mechanics, *Physica* **12** (1946) 405-460.

[Gr] C. Grosche, An introduction into the Feynman path integral, arXiv:hep-th/9302097; see also C. Grosche, F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals*, Springer Tracts in Modern Physics, 1998.

[G10] S. Gukov, Quantization via mirror symmetry, Takagi Lectures 2010, arXiv:1011.2218 [hep-th].

[GW] S. Gukov, E. Witten, D-branes and quantization, *Adv, Theor. Math. Phys.* **13** (2009) 1-73; arXiv:0809.0305v2 [hep-th].

[H] R. Haag, *Local Quantum Physics*, Springer, Brelin 1992, 412 pp.

[HIOPT] L.K. Hadjiivanov, A.P. Isaev, O.V. Ogievetsky, P.N. Pyatov, I.T. Todorov, Hecke algebraic properties of dynamical R-matrices. Application to related matrix algebras, *J. Math. Phys.* **40**(1999) 427-448; q-alg/9712026.

[H71] F. Hirzebruch, The signature theorem: reminiscenses and recreations, in: *Prospects in Mathematics*, Annals of Mathematics Study, Princeton University Press, 1971, pp. 3-32.

[H90] N. J. Hitchin, Flat connections and geometric quantization, *Commun. Math. Phys.* **131** (1990) 347-380.

[Hi] N. Hitchin, Hyperkähler manifolds, in *Séminaire Bourbaki*, 44ème année, November 1991, *S.M.F. Astérisque* **206** (1992) 137-166 (available electronically).

[I] C.J. Isham, Topological and global aspects of quantum theory, in: *Relativity, Groups and Topology II*, North Holland, Amsterdam 1984.

[J27] P. Jordan, Über Wellen und Korpuskeln in der Quantenmechanik, *Zeits. Phys.* **45** (1927) 765-775; Philosophical foundations of quantum theory, *Nature* **119** (1927) 566-569, 779.

[J36] P. Jordan, *Die Physik des 20. Jahrhunderts* 1936; English translation: *Physics of the 20th Century*, Philosophical Library, N.Y. 1944.

[J41] P. Jordan, *Die Physik und das Geheimnis des organischen Lebens*, Vieweg, Braunschweig 1941.

[J] P. Jordan, My recollections of Wolfgang Pauli, *Am. J. Phys.* **43**:3 (1975) 205-208 (transl. from *Physik. Blätter* **29** (1973) 291-298).

[JK27] P. Jordan, O. Klein, Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie, *Zeits. Phys.* **45** (1927) 751-765.

[JNW] P. Jordan, J. von Neumann, E.P. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Ann. of Math.* **35**:1 (1934) 29-64.

[JW28] P. Jordan, E.P. Wigner, Über Paulische äquivalenzverbot, *Zeits. Phys.* **47** (1928) 631-651.

[Kh] A. Khrennikov, Bell's inequality: physics meets probability. *Information Science* **179**:5 (2009) 492-504; arXiv:0709.3909 [uant-ph].

[K99] A.A. Kirillov, Merits and demerits of the orbit method, *Bull. Amer. Math. Soc.* **36** (1999) 433-488.

[K] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, *Lett. Math. Phys.* **66** (2003) 157-216; q-alg/9709040.

[K96] A.G. Kovalev, Nahm's equation and complex adjoint orbits, *Quart. J. Math. Oxford* Ser. 2 **47**:185 (1996) 41-58.

[Kr] P.B. Kronheimer, A hyper-Kählerian structure on coadjoint orbits of a semisimple complex group, *J. of London Math. Soc.* **42** (1990) 193-208.

[LW] G. Lechner, S. Waldmann, Strict deformation quantization of locally convex algebras and modules, arXiv:1109.5950 [math.QA].

[Mac] George W. Mackey, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Dover Publ., Mineola, NY 2004.

[MH] W. Mecklenbräuker, F. Hlawatsch, *The Wigner Distribution: Theory and Applications in Signal Processing*, Elsevier, 1997 (459 pp.).

[MR] J. Mehra, H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*, Vol. **3**: *The Formulation of Matrix Mechanics and Its Modifications 1925-1926*, Springer, N.Y. et al. 1982; **6**: The Completion of Quantum Mechanics 1926-1941, Springer, N.Y. (Part 1, 2000, Part 2, 2001) 1612 pp.

[Me] Karl Von Meyenn, Jordan, Ernst Pascual, in: *Complete Dictionary of Scientific Biography.* 2008. Encyclopedia,com (July 15, 2011), http://www.encyclopedia.com/doc/IG2-2830905174.html (Paper edition: Frederic L. Holmes, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, vol. **17**, Charles Scribner's Sons, New York 1990, pp. 448-454.

[Mo] M. Monastyrsky, *Riemann, Topology, and Physics*,forward by F.J. Dyson, ed R.O. Wells Jr., Birkhäuser, Boston 1987; second Russian edition, Janus-K, Moscow 1999.

[M] A. Moroianu, *Lectures on Kähler Geometry*, London Mathematical Society Student Texts, **69**, 2007, 182 pp.

[M49] J.E. Moyal, Quantum mechanics as a statistical theory, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45** (1949) 99-124.

[M86] W. Mückenheim et al., A review of extended probabilities, *Phys. Rep.* **133**:6 (1986) 337-401.

[NT] N.M. Nikolov, I.T. Todorov, Elliptic thermal correlation functions and modular forms in a globally conformal invariant QFT, *Rev. Math. Phys.* **17**:6 (2005) 613-667; hep-th/0403191; Lectures on elliptic functions and modular forms in conformal field theory, *Proceedings of the 3d Summer School in Modern Mathematical Physics*, Zlatibor, Serbia and Montenegro August 20-31, 2004), Eds. B. Dragovich, Z. Radić, B. Sazdović, Inst. Phys., Belgrade 2005, pp. 1-93; math-ph/0412039.

[N] D. Nolte, The tangled tale of phase space, *Physics Today* **33** (April 2010) 33-38.

[P] Abraham Pais, *'Subtle is the Lord...' The Science and the Life of Albert Einstein*, Clarendon Press, Oxford 1982 (552 pp.).

[P86] A. Pais, *Inward Bounds of Matter and Forces in the Physical World*, Clarendon Press, Oxford 1986 (666 pp.).

[PJ07] *Pascual Jordan (1902-1980)*, Mainzer Symposium zum 100. Geburtstag, Max-Planck-Institut für Wissenschaftgeschichte, Preprint 329, 2007, 208 pp.; http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/ Preprints/P329.PDF; see, in particular, J. Ehlers, Pascual Jordan's role in the creation of quantum field theory, pp. 25-35; B. Schroer, Pascual Jordan: biographical notes, his contributions to quantum mechanics and his role as protagonist of quantum field theory, pp. 47-68; D. Hoffmann, M. Walker, Der gute Nazi: Pascual Jordan und der Dritte Reich, pp. 83-112; H. Kragh, From quantum theory to cosmology: Pascual Jordan and world physics, pp. 133-143.

[Poincare] *The Scientific Legacy of Poincaré*, E. Charpentir, E. Ghys, A. Lesne, eds., AMS, 2010 (original French edition: '*L'héritage Scientifique de Poincaré*, Editions Belin, Paris 2006).

[QTAM] *Quantum Theory of Angular Momentum*, A collection of reprints and original papers, edited by L.C. Biedenharn, H. Van Dam, Academic Press, New York 1965.

[S06] B. Schroer, Physicists in times of war, physics/0603095.

[S10] B. Schroer, Pascual Jordan's legacy and the ongoing research in quantum field theory, arXiv:1010.4431 [physics.hist-ph].

[Sch99] E. Schücking, Jordan, Pauli, politics, Brecht and a variable gravitational constant, *Physics Today* **52**:10 (1999) 26-31; full version in: *On Einstein's Path*, ed. A. Harvey, Springer, 1999, pp. 1-14.

[Sch] S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*, Princeton Univ. Press, Princeton 1994; see, in particular, Chapter 1: The birth of quantum field theory.

[Sc] J. Schwinger, On angular momentum, a 1952 preprint, in [QTAM] pp. 229-279.

[SQM] *Sources in Quantum Mechanics*, edited with a historical introduction by B.L. van der Waerden, Dover, 1967.

[S98] D. Sternheimer, Deformation Quantization: Twenty Years After, *AIP Conf.Proc.* **453** (1998) 107-145; arXiv:math/9809056v1 [math.QA].

[SR] E.C.G.Sudarshan, T. Rothman, A new interpretation of Bell's inequalities, *Int. J. Theor. Phys.* **32**:7 (1993) 1077-1086.

[T] L.A. Takhtajan, *Quantum Mechanics for Mathematicians* Graduate Studies in Mathematics **95**, AMS, 2008 (a shorter earlier version, entitled *Lecvtures on Quntum Mechanics* is available electronically).

[T05] I. Todorov, Werner Heisenberg (1901-1976), arXiv:physics/0503235.

[T10] I. Todorov, Minimal representations and reductive dual pairs in conformal field theory, *8th International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics*, ed. V. Dobrev, *AIP Conference Proceedings* **1243** (Melville,NY 2010) pp.13-30; arXiv:1006.1981 [math-ph].

[T11] I. Todorov, Clifford algebras and spinors, *Bulg. J. Phys.* **38** (2011) 3-28; arXiv:1106.3197v2 [math-ph].

[Tom] Sin Itiro Tomonaga, *The Story of Spin*, transl. by T. Oka, Univ. Chicago Press, 1997.

[Tr] Andrzej Trautman, Remarks on the history of the notion of Lie differentiation, in: *Variations, Geometry and Physics*, in honor of Demeter Krupka's sixty-fifth birthday, O. Krupková, D.J. Saunders (eds.) Nova Science Publishers, 2008 (available electronically).

[V] S. Vandoren, Lectures on Riemannian Geometry, Part II. Complex Manifolds, http://www.phys.uu.nl/ vandoren/MRIlectures.pdf.

[V51] L. Van Hove, Sur les problèmes des relations entre les transformations unitaires de la mécanique quantique et les transformations canoniques de la mécanique classique, *Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci* (5) **37** (1951) 610-620.

[V58] L. Van Hove, Von Neumann's contributions to quantum theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958) Part 2, 95-99.

[vN31] J. von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math. Anal.* **104** (1931) 570-578.

[vN] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin 1932 (English translation: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Beyer, R. T., trans., Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton Univ. Press, Princeton 1996).

[WN] M.J. Way, H. Nussbaumer, The linear redshift-distance relationship: Lemaître beats Hubble by two years, *Physics Today* (2011); arXiv:1104.3031 [physics.hist-ph].

[W] André Weil, *Introduction à l'Étude des Variétés Kählériennes*, Hermann, Paris 1958.

[W64] A. Weil, Sur certains groupes d' opérateurs unitaires, *Acta Math.* **111** (1964) 143-211; Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, *ibid.* **113** (1965) 1-87.

[W94] Alan Weinstein, Deformation quantization, *S´eminaire Bourbaki*, expos´e 789 , *Ast´erisque* **227** (1994) 389-409.

[WZ] A. Weinstein, M. Zambon, Variations on prequantization, *Travaux mathématiques* **16** (2005) 187-219; math.SG/0412502.

[We] H. Weyl, Quantenmechanik und Gruppentheorie, *Zeits. Phys.* **46** (1927) 1-46; *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York 1931 (original German edition: Hirzel Verlag, Leipzig 1928).

[W32] E.P. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749-759.

[W10] E. Witten, A new look on the path integral of quantum mechanics, arXiv:1009.6032 [hep-th].

[Wo] N. Woodhouse, Geometric Quantization, 2nd ed., Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford University Press, New York 1992.

[ZFC] C. Zachos, D. Fairlie, T. Curtright (eds.) *Quantum Mechanics in Phase Space, An Overview with Selected Papers*, World Scientific, 2005.

[ZZ] M. Zambon, Chenchang Zhu, On the geometry of prequantization spaces, *J. Geom. Phys.* **57**(11) (2007) 2372-2397; math/0511187.

[ZJ] Jean Zinn-Justin, *Path Integrals in Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 2004.