

Morse 理论

基于 M. Spivak 和 R. Wells 的课程笔记

John Willard Milnor

普林斯顿大学出版社

前言

本书对 Marston Morse 的大变分理论进行了当代阐释。然而近几年的重要进展并未提及。以下将介绍其中三项：R. Palais 与 S. Smale 研究了无限维流形上实值函数的 Morse 理论，并给出了主要定理的直接证明，全程未使用有限维逼近。相关流形需在局部意义上与 Hilbert 空间微分同胚，且函数须满足弱紧性条件。以有限维流形 M 上的路径研究为例：可考虑由所有绝对连续路径 $\omega : [0, 1] \rightarrow M$ 组成的 Hilbert 流形，这些路径需满足平方可积的一阶导数条件。相关论述详见 [1] 与 [2]。

Bott 周期性定理最初受到 Morse 理论的启发（参见第四章）。然而，近期已给出更基础的证明，这些证明完全不涉及 Morse 理论。详见 [3] 及 [4]。

Morse 理论为 S. Smale、A. Wallace 等人推动微分拓扑学取得激动人心的进展提供了灵感，其中包括对高维广义 Poincaré 猜想的证明。我在 [5] 中尝试描述了部分相关研究成果。

请允许我借此机会澄清一个可能引起混淆的术语。在第 12 节中，我使用“能量”一词表示沿路径 $\omega(t)$ 的积分

$$E = \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt.$$

V. Arnol'd 向我指出，过去 200 年来数学家们将该积分称为“作用量”积分。这种术语差异源于该积分在物理模型中可作多重解释的事实。

考虑一个粒子 P 在时间间隔 $0 \leq t \leq 1$ 内沿着一个曲面 M 运动。粒子在此时间间隔内的**作用量 (action)** 定义为一个常数乘以积分 E 。若无外力作用于 P （除将其限制在 M 内的约束力外），则“最小作用量原理”断言：在连接 $\omega(0)$ 与 $\omega(1)$ 的所有路径类中， E 将被最小化，或至少 E 的第一变分将为零。因此 P 必须沿测地线运动。但截然不同的物理模型是可能的。考虑一根橡皮筋横跨光滑曲面两点。若用参数方程 $x = \omega(t)$ ， $0 \leq t \leq 1$ 描述该橡皮筋，则张力产生的势能将与我们的积分 E 成正比（至少在一阶近似下成立）。在平衡位置处，该能量必须最小化，因此橡皮筋将描绘一条测地线。

下文除若干处修正外，与初版内容完全一致。谨向 V. Arnol'd、D. Epstein 和 Jr. W. B. Houston 指出修正之处表示感谢。

J. W. Milnor
洛杉矶，1968 年 7 月

目录

第一章 流形上的非退化光滑函数	1
§ 1. 引论	1
§ 2. 一些定义和引理	3
§ 3. 用临界值刻画流形的同伦型	8
§ 4. 例子	16
§ 5. Morse 不等式	17
§ 6. Euclid 空间中的流形	20
§ 7. 超平面截面上的 Lefschetz 定理	24
第二章 Riemann 几何速成课程	27
§ 8. 协变微分	27
§ 9. 曲率张量	31
§ 10. 测地线与完备性	34
第三章 对变分学的应用：测地线	42
§ 11. 光滑流形的路径空间	42
§ 12. 路径的能量	43
§ 13. 能量函数在临界路径处的 Hesse 泛函	46
§ 14. Jacobi 场, E_{**} 的零化子空间	48
§ 15. 指标定理	51
§ 16. Ω^c 的有限维逼近	54
§ 17. 全路径空间的拓扑结构	56
§ 18. 非共轭点的存在性	59
§ 19. 拓扑与曲率之间的某些关系	60
第四章 对 Lie 群和对称空间的应用	65
§ 20. 对称空间	65
§ 21. Lie 群是对称空间	65
§ 22. 极小测地线组成的全流形	65
§ 23. Bott 关于么正群的周期性定理	65
§ 24. 正交群的周期性定理	65
附录 A 单调的并同伦型	66
参考文献	69

第一章 流形上的非退化光滑函数

§ 1. 引论

在本节中，我们将通过一个具体实例说明后续将针对任意流形进行研究的情况。让我们考虑一个环面 M ，其切于平面 V ，如图 1.1 所示。

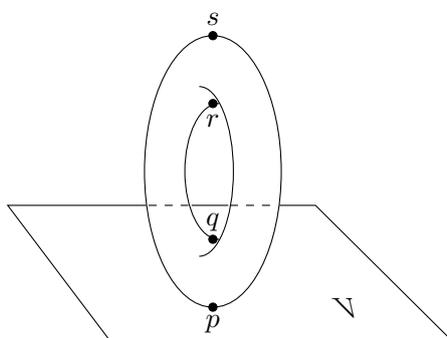
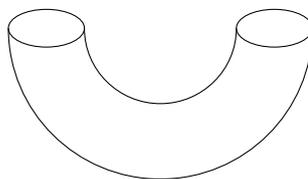


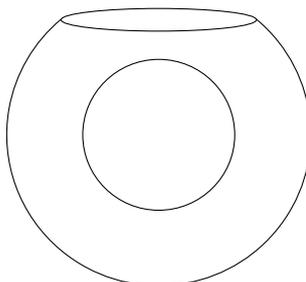
图 1.1

令 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R} 总表示实数) 是平面 V 上的高度，并令 M^a 为使得 $f(x) < a$ 的所有点 $x \in M$ 的集合。则下列事情为真：

- (1) 如果 $a < 0 = f(p)$ ，则 M^a 是空集。
- (2) 如果 $f(p) < a < f(q)$ ，则 M^a 同胚于一个 2 维胞腔。
- (3) 如果 $f(q) < a < f(r)$ ，则 M^a 同胚于圆柱面：



- (4) 如果 $f(r) < a < f(s)$ ，则 M^a 同胚于一个具有圆形边界亏格为 1 的紧致流形：



(5) 如果 $f(s) < a$, 则 M^a 是整个环面。

为了描述当 a 通过 $f(p), f(q), f(r), f(s)$ 其中一点时 M^a 中发生的变化, 考虑同伦型要比考虑同胚型更方便。就同伦型而言:

(1)→(2) 的变化是粘合一个 0 维胞腔的运算。因为, 就同伦型而言, 当 $f(p) < a < f(q)$ 时, 空间 M^a 同一个 0 维胞腔毫无区别:

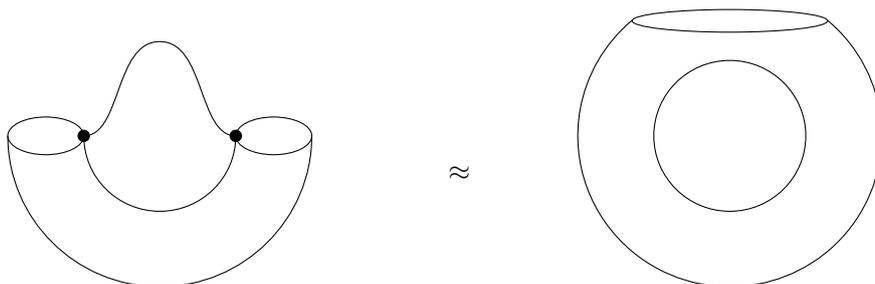


这里 “ \approx ” 表示 “具有相同的同伦型”。

(2)→(3) 的变化是粘合一个 1 维胞腔的运算:



(3)→(4) 的变化仍然是粘合一个 1 维胞腔的运算:



(4)→(5) 的变化是粘合一个 2 维胞腔的运算。

“粘合一个 k 维胞腔” 的明确定义可以如下给出。令 Y 为任意拓扑空间, 并且令

$$e^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\},$$

是 k 维胞腔, 由 k 维 Euclid 空间中长度 ≤ 1 的所有向量组成。

边界

$$\dot{e}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| = 1\},$$

记为 S^{k-1} 。如果 $g: S^{k-1} \rightarrow Y$ 是一个连续映射, 则首先通过取 Y 和 e^k 的拓扑和 (= 不交并), 然后把每个 $x \in S^{k-1}$ 和 $g(x) \in Y$ 一样来获得

$$Y \cup_g e^k,$$

(用 g 粘合 Y 和 k 维胞腔 e^k)。就 $k=0$ 的情形而言, 令 e^0 是一个点, 并且令 $\dot{e}^0 = S^{-1}$ 是空集, 所以 Y 和一个 0 维胞腔粘合起来, 不过就是 Y 和一个不交点的并。

正如我们可能想到, M^a 的同伦型发生变化的各点 p, q, r 和 s 的特性可以借助于函数 f 加以简单地刻画。这些点是函数的**临界点 (critical point)**: 如果我们在这些点的附近选择任意坐标系 (x, y) , 则导数 $\partial f/\partial x$ 和 $\partial f/\partial y$ 都为零。在 p 处, 我们可以选择 (x, y) 使得 $f = x^2 + y^2$, 在 s 处使得 $f = \text{常数} - x^2 - y^2$, 并且在 q 和 r 使得 $f = \text{常数} + x^2 - y^2$ 。注意到在每一点处, f 的表达式

中负号的个数，正好就是从 M^a 到 M^b 时必须粘合的胞腔的维数，这里 $a < f(\text{所考虑的点}) < b$ 。我们的首先几个定理将把这些事实推广到流形上任意可微函数。

对于有关 Morse 理论的进一步信息，下面的材料极为有用：[6], [7], [8], [9]。

§ 2. 一些定义和引理

词汇“光滑”和“可微”交替地用来表示 C^∞ 可微。光滑流形 M 在点 p 处的切空间记为 TM_p 。如果 $g: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射， $g(p) = q$ ，则 g 在切空间的诱导线性映射记为 $g_*: TM_p \rightarrow TN_q$ 。

现在令 f 是流形 M 上一个光滑实值函数。点 $p \in M$ 被称为 f 的**临界点 (critical point)**，如果诱导映射 $f_*: TM_p \rightarrow T\mathbb{R}_{f(p)}$ 是零映射。如果在点 p 的领域 U 中选取局域坐标系 (x^1, \dots, x^n) ，则

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial}{\partial x^n}(p) = 0.$$

实数 $f(p)$ 称为 f 的**临界值 (critical value)**。

我们用 M^a 表示使得 $f(x) \leq a$ 的所有点 $x \in M$ 的集合。如果 a 不是 f 的一个临界值，则从隐函数定理可得 M^a 是一个有边界的光滑流形。边界 $f^{-1}(a)$ 是 M 的光滑子流形。

一个临界点 p 被称为**非退化的 (non-degenerate)**，当且仅当矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)$$

是非奇异的。可以直接验证：非退化性不依赖于坐标系的选择。这一点也可以从下面内禀性定义得出。

如果 p 是 f 的临界点，我们定义 TM_p 上的一个对称双线性泛函 f_{**} ，称为 f 在点 p 处的**Hesse 泛函 (Hessian)**。若 $v, w \in TM_p$ ，则 v 和 w 可以扩张为向量场 \tilde{v} 和 \tilde{w} 。我们令¹ $f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$ ，其中 \tilde{v}_p 当然就是 v 。我们必须说明这是对称且良定义的。它是对称的因为

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0,$$

其中， $[\tilde{v}, \tilde{w}]$ 是 \tilde{v} 和 \tilde{w} 的 Poisson 括号，而 $[\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0$ 是由于 p 是 f 的临界点。

因此， f_{**} 是对称的。现在它显然是良定义的因为 $\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = v_p(\tilde{w}(f))$ 独立于 v 的扩张 \tilde{v} ，而 $\tilde{w}_p(\tilde{v}(f))$ 独立于 \tilde{w} 。

如果 (x_1, \dots, x_n) 是一个局部坐标系且 $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ ， $w = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ ，我们可以取 $\tilde{w} = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ ，其中 b_j 现在记为一个常值函数。于是

$$f_{**}(v, w) = v(\tilde{w}(f))(p) = v \left(\sum b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) (p) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p);$$

所以矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)$ 是双线性泛函 f_{**} 在 $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$ 这组基下的表示。

我们现在可以讨论 TM_p 上双线性泛函 f_{**} 的**指标 (index)** 和**零化数 (nullity)**。在一个向量空间 V 上，双线性泛函 H 的指标 (index) 被定义为 V 的一个子空间 (在其上 H 是负定的) 的最大维数；**零化数 (nullity)** 是**零化子空间 (null-space)** 的维度，而零化子空间，即：包括所有 $v \in V$ 使得对于每个 $w \in V$ 都有 $H(v, w) = 0$ 的子空间。显然，点 p 是 f 的一个非退化临界点当且仅当 f_{**} 在 TM_p 上有零化数且为零。 f_{**} 在 TM_p 上的指标将被简称为 f 在 p 处的指标。Morse 的引理表明： f 在点 p 处的行为可以完全由这个指标刻画。在表述这个引理之前，我们首先证明下面：

¹这里 $\tilde{w}(f)$ 表示 f 在方向 \tilde{w} 上的方向导数。

其中, (x_1, \dots, x_2) 在原点 0 的某个领域中。由于点 0 被假设为一个临界点:

$$g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0.$$

因此, 应用引理 2.1 于 g_j , 我们有

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

其中, h_{ij} 是某些确定的光滑函数, 从而

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n).$$

我们可以假设 $h_{ij} = h_{ji}$, 因为我们可以记 $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, 则有 $\bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ji}$, 并且 $f = \sum x_i x_j \bar{h}_{ij}$ 。此外, 矩阵 $(\bar{h}_{ij}(0))$ 等于 $\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$, 并且因此是非奇异的。

于是, 存在一个非奇异坐标变换, 使得 f 在原点 0 的某个可能更小的邻域中有所要的表达式。要看出这点我们可以完全仿照对二次型一般对角化的证明 (例如见 [10])。关键的一步描述如下:

用归纳法, 假设在 0 的某个邻域 U_1 中, 存在坐标系 (u_1, \dots, u_n) , 使得在整个 U_1 中

$$f = \pm(u_1)^2 \pm \dots \pm (u_{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n);$$

其中, 矩阵 $(H_{ij}(u_1, \dots, u_n))$ 是对称的。对最后 $n - r + 1$ 个坐标进行线性变换后, 我们可以假设 $H_{rr}(0) \neq 0$ 。记 $g(u_1, \dots, u_n)$ 为 $|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|$ 的平方根。它在 0 的某些更小的领域 $U_2 \subset U_1$ 中是 u_1, \dots, u_n 的非零光滑函数。现在引入新坐标 v_1, \dots, v_n 如下:

$$v_i = u_i, \text{ 如果 } i \neq r,$$

$$v_r(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) \left[u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right].$$

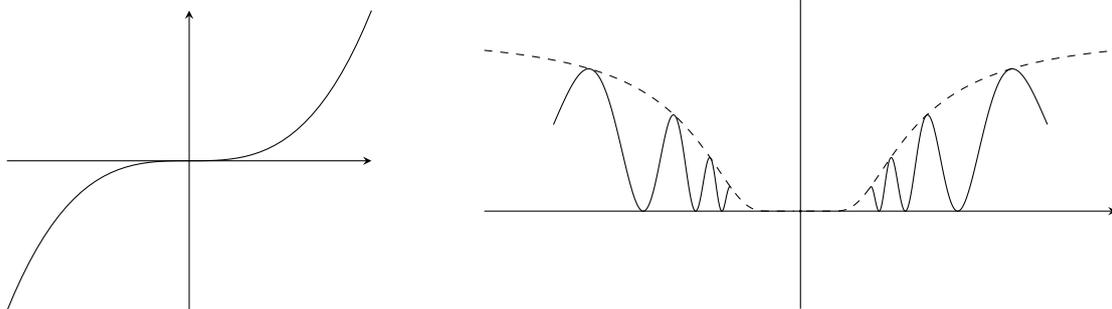
从反函数定理可以得到, 在 0 的某个充分小的邻域 U_3 中, v_1, \dots, v_n 可以取作坐标函数。容易验证, 在整个 U_3 中, f 可以表述为

$$f = \sum_{i \leq r} \pm (v_i)^2 + \sum_{i,j > r} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \dots, v_n).$$

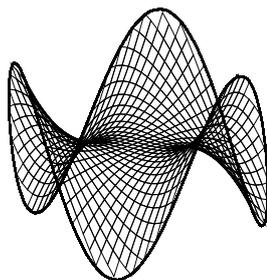
这完成了归纳证明; 并证明了引理 2.2。 □

推论 2.3. 非退化临界点是孤立的。

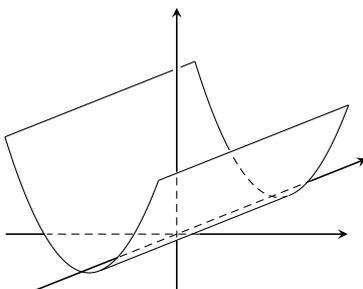
下面给出退化临界点 (对于 \mathbb{R} 和 \mathbb{R}^2 的函数) 的一些例子, 以及它们的图示。



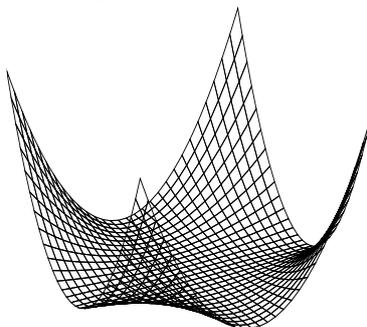
(a) $f(x) = x^3$. 原点是退化的临界点。 (b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$. 原点是退化的非孤立临界点。



(c) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 = (x + iy)^3$ 的实部。原点 $(0, 0)$ 是退化的临界点 (“猴鞍点”)。



(d) $f(x, y) = x^2$ 。临界点集是 y 轴，它是 \mathbb{R}^2 的子流形。临界点全是退化的。



(e) $f(x, y) = x^2y^2$ 。临界点全是退化的。临界点集是 x 轴和 y 轴的并，不是 \mathbb{R}^2 的子流形。在结束本节之前，让我们来讨论单参数微分同胚群。想要深究的读者可以参考 [11]。

流形 M 的单参数微分同胚群是一个 C^∞ 映射

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M,$$

使得

- (1) 对于每个 $t \in \mathbb{R}$ ，由 $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ 定义的映射 $\varphi_t : M \rightarrow M$ ，是一个把 M 映成自己的微分同胚。
- (2) 对于所有 $t, s \in \mathbb{R}$ ，有 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ 。

给定 M 的一个单参数微分同胚群 φ ，我们可以定义 M 上的一个向量场 X 如下：对于每个光滑实值函数 f ，令

$$X_q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h}$$

这个向量场 X 被称为产生 (generate) 群 φ 。

引理 2.4. 如果 M 上的光滑向量场 X 在一个紧致集 $K \subset M$ 之外为零, 则 X 产生 M 的唯一一个单参数微分同胚群 φ 。

证明. 给定任意光滑曲线

$$t \mapsto c(t) \in M$$

我们定义它的**速度向量 (velocity vector)**

$$\frac{dc}{dt} \in TM_{c(t)}$$

为

$$\frac{dc}{dt}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h}$$

(与第8节比较)。现在假设 φ 是一个单参数微分同胚群, 由向量场 X 所产生。则对于每个确定的 q , 曲线

$$t \mapsto \varphi_t(q)$$

满足微分方程

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)}$$

以及初始条件 $\varphi_0(q) = q$ 。这是真的因为

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_{t+h}(q)) - f(\varphi_t(q))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h} = X_p(f),$$

其中 $p = \varphi_t(q)$ 。但是, 大家知道这样一个微分方程, 局部有唯一解, 光滑依赖于初始条件。(见 [12], 第 166 页。注意到, 这个微分方程可以使用局部坐标 u^1, \dots, u^n 改写为比较熟悉的形式: $\frac{du^i}{dt} = x^i(u^1, \dots, u^n)$, $i = 1, \dots, n$ 。)

因此对于 M 的每个点, 存在一个邻域 U 和一个数 $\varepsilon > 0$, 使得当 $q \in U$, $|t| < \varepsilon$ 时, 微分方程

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)}, \quad \varphi_0(q) = q$$

具有唯一光滑解。

紧致集 K 可以用有限多个这样的邻域 U 覆盖。令 $\varepsilon_0 > 0$ 表示对应数 ε 中最小的数。对于 $q \notin K$, 令 $\varphi_t(q) = q$, 则对于 $|t| < \varepsilon_0$ 和对于所有 $q \in M$, 这个微分方程具有唯一解 $\varphi_t(q)$ 。这个解作为双变量函数是光滑的。此外, 如果 $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon_0$, 显然有 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ 。因此, 每个这样的 φ_t 都是一个微分同胚。

现在只剩下对 $|t| \geq \varepsilon_0$, 定义 ε_t 。任意数 t 可以表示成 $\frac{\varepsilon_0}{2}$ 的倍数再加上一个余数 r , 其中 $|r| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ 。如果 $t = k\frac{\varepsilon_0}{2} + r$, $k \geq 0$, 则令

$$\varphi_t = \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \cdots \circ \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \varphi_r,$$

其中 $\varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ 重复变换 k 次。如果 $k < 0$, 只需用 $\varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ 代替 $\varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ 并重复 $-k$ 次即可, 因此 φ_t 对 t 的所有值是有定义的。不难验证, φ_t 是良定义的、光滑的, 并且满足条件 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ 。这样就完成了对引理 2.4 的证明。□

注. 假设 X 的一个紧致集之外为零不能忽略。举例而言, 令 M 是单位开区间 $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, 并且令 X 是 M 上的标准向量场 $\frac{d}{dt}$, 则 X 不产生 M 的任何单参数微分同胚群。

§ 3. 用临界值刻画流形的同伦型

在这一整节里, 如果 f 是流形 M 上的实值函数, 则令

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M : f(p) \leq a\}.$$

定理 3.1. 令 f 是流形 M 上的光滑实值函数。令 $a < b$ 并且假设集合 $f^{-1}[a, b] = \{p \in M : a \leq f(p) \leq b\}$ 是紧致集, 不含 f 的临界点, 则 M^a 微分同胚于 M^b 。此外, M^a 是 M^b 的形变收缩核, 所以包含映射 $M^a \rightarrow M^b$ 是一个同伦等价。

证明. 证明的思想在于沿着超曲面 $f = \text{常数}$ 的正交轨道把 M^b 向下推到 M^a (见图 3.1)。

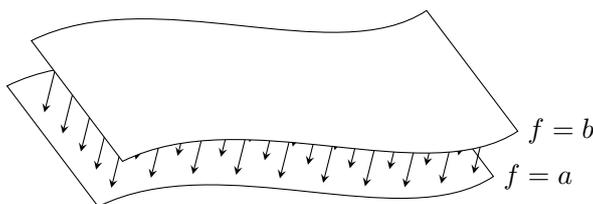


图 3.1

在 M 上选择一个 Riemann 度规; 并令 $\langle x, y \rangle$ 表示两个切向量的内积, 由这个度规所确定。 f 的**梯度 (gradient)** 是 M 上的向量场 $\text{grad}f$, 由下面这个恒等式²完全描述: 对于任意向量场 X ,

$$\langle X, \text{grad}f \rangle = X(f)$$

($= f$ 沿着 X 的方向导数)。向量场 $\text{grad}f$ 在 f 的临界点正好为零。如果 $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ 是一条曲线, 其速度向量为 $\frac{dc}{dt}$, 则有恒等式

$$\left\langle \frac{dc}{dt}, \text{grad}f \right\rangle = \frac{d(f \circ c)}{dt}.$$

现在令 $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数, 在整个紧致集 $f^{-1}[a, b]$ 上 $\frac{1}{\langle \text{grad}f, \text{grad}f \rangle}$; 而在这个集合的某个紧致领域之外为零。于是, 由

$$X_q = \rho(q)(\text{grad}f)_q$$

定义的向量场 X 满足引理 2.4 的条件。因此, X 产生的一个单参数微分同胚群

$$\varphi_t: M \rightarrow M.$$

对于确定的 $q \in M$, 考虑函数 $t \rightarrow f(\varphi_t(q))$ 。如果 $\varphi_t(q)$ 位于集合 $f^{-1}[a, b]$, 则

$$\frac{f(\varphi_t(q))}{dt} = \left\langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, \text{grad}f \right\rangle = \langle X, \text{grad}f \rangle = +1.$$

因此, 只要 $f(\varphi_t(q))$ 在 a 和 b 之间, 则对应关系

$$t \mapsto f(\varphi_t(q))$$

是线性的, 并且导数为 $+1$ 。

²用经典记号, 使用局部坐标 u^1, \dots, u^n , 梯度向量的分量为 $\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j}$ 。

现在考虑微分同胚 $\varphi_{b-a} : M \rightarrow M$ 。显然，这个映射把 M^a 微分同胚地映射成 M^b 。这就证明了定理 3.1 的前一半。

定义一个单参数映射族

$$r_t : M^b \rightarrow M^b$$

为

$$r_t(q) = \begin{cases} q, & \text{如果 } f(q) \leq a, \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q), & \text{如果 } a \leq f(q) \leq b. \end{cases}$$

则 r_0 是恒等映射，而 r_1 是从 M^b 到 M^a 的收缩映射。因此， M^a 是 M^b 的一个收缩核。这完成了证明。 \square

注. $f^{-1}[a, b]$ 是紧致的这个条件不能忽略。举例来说，图 3.2 表示这个集合不是紧致的情况，其中流形 M 不含点 p 。显然， M^a 不是 M^b 的形变收缩核。

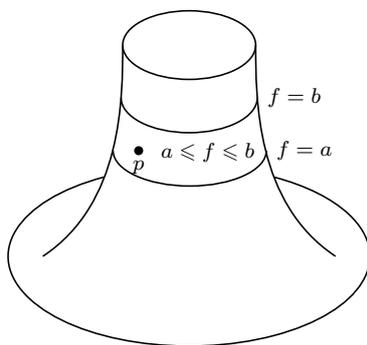


图 3.2

定理 3.2. 令 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，并令 p 是一个其指标为 λ 的非退化临界点。设 $f(p) = c$ ，对于一些 $\varepsilon > 0$ ，假设集合 $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ 是紧致的，并且除了点 p 以外不再含有 f 的其它临界点。则对于足够小的 ε ，集合 $M^{c+\varepsilon}$ 的同伦型与 $M^{c-\varepsilon}$ 粘上一个 λ 维胞腔后的同伦型相同。

这一定理的证明思路针对环面上的高度函数这一特殊情形，在图 3.3 中予以展示。区域

$$M^{c-\varepsilon} = f^{-1}(-\infty, c - \varepsilon)$$

用重阴影来表示。我们将引入一个新函数 $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得在点 p 的某个小邻域中 $F < f$ ，而在这个邻域之外 F 和高度函数 f 完全相同。因此，区域 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 就由 $M^{c-\varepsilon}$ 以及点 p 附近的一个区域 H 组成。在图 3.3 中， H 使用水平阴影区域来表示的。

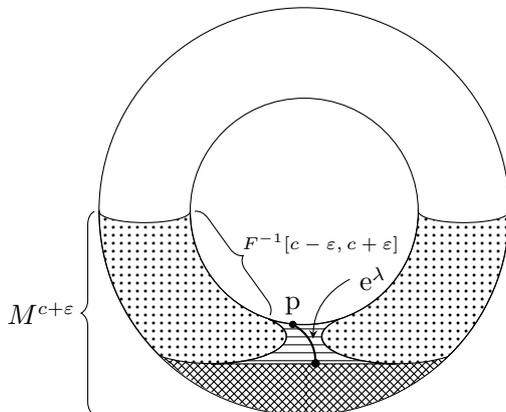


图 3.3

选择一个合适的胞腔 $e^\lambda \subset H$, (利用沿水平线的推移) 可以直接说明 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 的形变收缩核。最后, 通过对函数 F 和区域 $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 应用定理 3.1, 我们将会看到 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 是 $M^{c+\varepsilon}$ 的一个形变收缩核。这就是证明定理 3.2 的思想。

现在把这个证明详细写出来:

证明. 选取点 p 的邻域 U 中局部坐标系 u^1, \dots, u^n , 使得恒等式

$$f = c - (u^1)^2 - \dots - (u^\lambda)^2 + (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2$$

在整个 U 中都成立。因此, 临界点 p 具有坐标

$$u^1(p) = \dots = u^n(p) = 0.$$

取 $\varepsilon > 0$ 足够小, 使得

- (1) 区域 $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 是紧致的, 并且除了点 p 外不再含有其它临界点。
- (2) 在微分同胚嵌入映射

$$(u^1, \dots, u^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

下, U 的像包含闭球

$$\{(u^1, \dots, u^n) : \sum (u^i)^2 \leq 2\varepsilon\}.$$

现在定义 e^λ 为 U 中的点的集合, 满足

$$(u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 \leq \varepsilon \text{ 和 } u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0.$$

最终情形的示意图如图 3.4 所示。

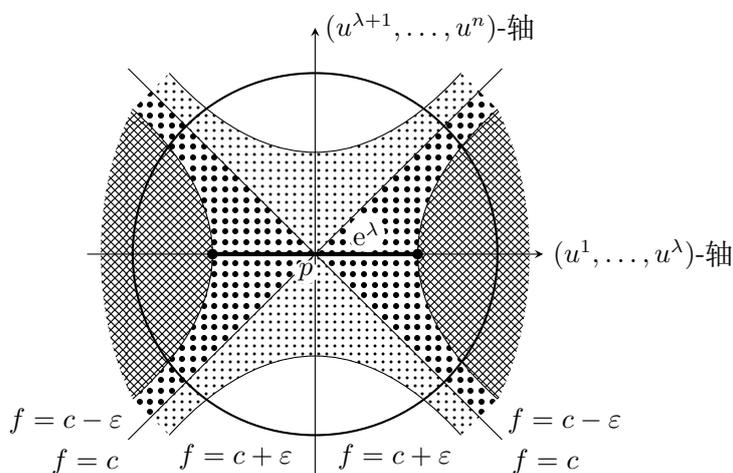


图 3.4

两根坐标线分别表示 $u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0$ 和 $u^1 = \dots = u^\lambda = 0$; 圆表示半径为 $\sqrt{2\varepsilon}$ 的球的边界; 两条双曲线分别表示超曲面 $f^{-1}(c-\varepsilon)$ 和 $f^{-1}(c+\varepsilon)$; 区域 $M^{c-\varepsilon}$ 用重阴影表示, 区域 $f^{-1}[c-\varepsilon, c]$ 用大点表示, $f^{-1}[c, c+\varepsilon]$ 则用小点表示; 通过点 p 的水平黑线代表胞腔 e^λ 。

注意, $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon}$ 正好是边界 ∂e^λ , 所以 e^λ 和 $M^{c-\varepsilon}$ 自然粘合为 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 。我们必须证明 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 $M^{c+\varepsilon}$ 的收缩核。

构造一个新的光滑函数 $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ 如下。令 $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^∞ 函数满足条件:

- $\mu(0) > \varepsilon$,

- 对于 $r \geq 2\varepsilon$ 有 $\mu(r) = 0$,
- 对于一切 r 有 $-1 < \mu'(r) \leq 0$, 其中 $\mu' = \frac{d\mu}{dr}$.

现在令 F 在坐标领域 U 之外与 f 一致, 而在这个坐标邻域内, 则令

$$F = f - \mu[(u^1)^2 + \cdots + (u^\lambda)^2 + 2(u^{\lambda+1})^2 + \cdots + 2(u^n)^2].$$

容易验证在整个 M 上, F 是一个良定义的光滑函数。

为了方便定义两个函数

$$\xi, \eta : U \rightarrow [0, \infty)$$

为

$$\begin{aligned}\xi &= (u^1)^2 + \cdots + (u^\lambda)^2, \\ \eta &= (u^{\lambda+1})^2 + \cdots + (u^n)^2.\end{aligned}$$

则 $f = c - \xi + \eta$; 使得对于所有 $q \in U$,

$$F(q) = c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q)).$$

结论 1. 区域 $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$ 和区域 $M^{c+\varepsilon} = f^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$ 重合。

证明. 在椭球 $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$ 之外, 函数 F 和 f 显然是相同的。在一个椭球之内, 我们有

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon.$$

证毕。 □

结论 2. F 和 f 具有同样的临界点。

证明. 注意

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1.\end{aligned}$$

由于

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta,$$

其中, 余切向量 $d\xi$ 和 $d\eta$ 只在原点处才同时为零, 可见除了原点 p 外, F 在 U 中没有其它临界点。

现在考虑区域 $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ 。根据结论 1 以及不等式 $F \leq f$, 我们看出

$$F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon].$$

因此, 这个区域是紧致的。显然, 它除了可能含有点 p 以外不能含有 F 的其它临界点。但是

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon,$$

因此, $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ 不含 F 的任意临界点。结合定理 3.1, 这证明了以下结论。 □

结论 3. 区域 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 是 $M^{c+\varepsilon}$ 的形变收缩核。

为了方便记区域 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 为 $M^{c-\varepsilon} \cup H$; 其中, H 记为 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] - M^{c-\varepsilon}$ 的闭包。

注. 按照 Smale 的说法, 区域 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 被描述成 $M^{c-\varepsilon}$ 和一条“柄”粘起来。从定理 3.1 可见, 有边流形 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 微分同胚于 $M^{c+\varepsilon}$ 。这个事实在 Smale 的微分流形理论中是很重要的。(见 [13])。

现在考虑胞腔 e^λ ，由满足条件

$$\xi(q) \leq \varepsilon, \quad \eta(q) = 0$$

的所有点 $q \in U$ 组成。注意， e^λ 含于“柄” H 中。事实上，由于 $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$ ，我们有

$$F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon;$$

但在 $q \in e^\lambda$ 时 $f(q) \geq c - \varepsilon$ 。

现在的情况如图 3.5 所示：区域 $M^{c-\varepsilon}$ 用重阴影表示；柄 H 用铅直箭头表示；区域 $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 则用点表示。

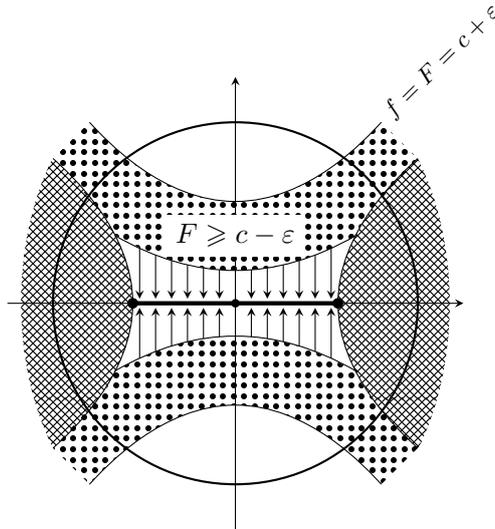


图 3.5

结论 4. 区域 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 的形变收缩核。

证明. 图 3.5 中的铅直箭头形象地表示出一个形变收缩映射 $r_t : M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H$ 。更确切的说，在邻域 U 之外，令 r_t 是恒等映射；在邻域 U 之内 r_t 的定义如下。我们需要分别考虑如图 3.6 所示的三种情形。

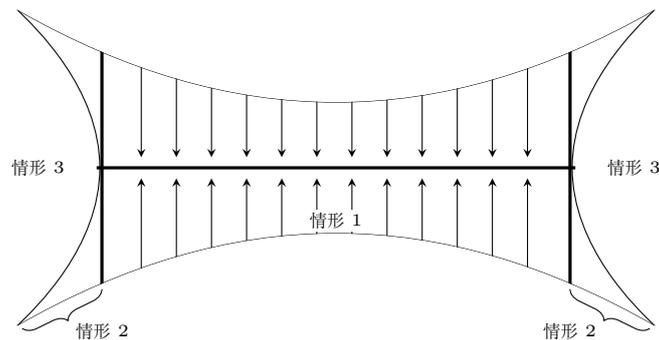


图 3.6

情形 1: 在区域 $\xi \leq \varepsilon$ 之内，令 r_t 对应于变换

$$(u^1, \dots, u^n) \mapsto (u^1, \dots, u^\lambda, tu^{\lambda+1}, \dots, tu^n).$$

因此， r_1 是恒等映射， r_0 将整个区域 $\xi \leq \varepsilon$ 映到 e^λ 。从不等式 $\frac{\partial F}{\partial \eta} > 0$ 可见，每个 r_t 都把区域 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 映射到它本身。

情形 2: 在区域 $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$ 之内, 令 r_t 对应于变换

$$(u^1, \dots, u^n) \mapsto (u^1, \dots, u^\lambda, s_t u^{\lambda+1}, \dots, s_t u^n)$$

其中数 $s_t \in [0, 1]$ 定义为

$$s_t = t + (1-t) \left(\frac{\xi - \varepsilon}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此, r_1 再一次是恒等映射, 并且 r_0 将整个区域映射到超曲面 $f^{-1}(c - \varepsilon)$ 。读者应该验证函数 $s_t u^i$ 在 $\xi \rightarrow \varepsilon, \eta \rightarrow 0$ 时保持连续。注意到这个定义在 $\xi = \varepsilon$ 时与情形 1 的定义一致。

情形 3: 在区域 $\eta + \varepsilon \leq \xi$ 内 (即: 在 $M^{c-\varepsilon}$ 内)。令 r_t 是恒等映射。当 $\xi = \eta + \varepsilon$ 时, 这个定义与前面的定义是一致的。

□

这就证明了 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 的形变收缩核。从而, 再结合结论 3, 就完成了定理 3.2 的证明。 □

注 3.3. 更一般地, 如果假设: 在 $f^{-1}(c)$ 中存在 k 个非退化临界点 p_1, \dots, p_k , 指数分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 那么可以类似地证明: $M^{c+\varepsilon}$ 和 $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$ 具有相同的同伦型。

注 3.4. 把定理 3.2 的证明稍加修改, 可以证明: M^c 也是 $M^{c+\varepsilon}$ 的形变收缩核。事实上, M^c 是 $F^{-1}(-\infty, c)$ 的形变收缩核, 而 $F^{-1}(-\infty, c)$ 则是 $M^{c+\varepsilon}$ 的形变收缩核 (见图 3.7)。将这一事实与定理 3.2 结合, 我们很容易看到 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 M^c 的形变收缩核。

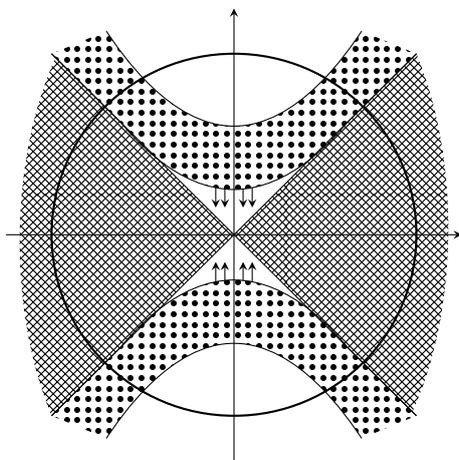


图 3.7: M^c 用重阴影表示, $F^{-1}[c, c + \varepsilon]$ 用点表示。

定理 3.5. 如果 f 是流形 M 上的可微函数, 没有退化临界点, 并且每个 M^a 都是紧致集, 那么 M 具有一个 CW 复形的同伦型: 对于指数为 λ 的每个临界点, 这个复形有一个 λ 维胞腔。

(CW 复形的定义见 [14])。

证明基于下面两个引理, 讨论一个拓扑空间和一个胞腔的粘合问题。

引理 3.6 (Whitehead). 令 φ_0 和 φ_1 是将球面 e^λ 映射到 X 的两个同伦映射, 则 X 的恒等映射可以扩张为一个同伦等价

$$k: X \cup_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_1} e^\lambda.$$

证明. 用下面的公式来定义同伦等价 k :

$$\begin{aligned} k(x) &= x, & \text{如果 } x \in X, \\ k(tu) &= 2tu, & \text{如果 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, u \in \dot{e}^\lambda, \\ k(tu) &= \varphi_{2-2t}(u), & \text{如果 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

其中, φ_t 记为 φ_0 和 φ_1 之间的同伦; 而 tu 记为标量 t 和单位向量 u 的乘积. 对应的映射

$$l: X \underset{\varphi_1}{\cup} e^\lambda \rightarrow X \underset{\varphi_0}{\cup} e^\lambda$$

被定义为类似的公式. 现在不难验证 kl 和 lk 同伦于对应的恒等映射. 因此 k 是一个同伦等价. \square

更多细节读者可以参考 [15] 的引理 5.

引理 3.7. 令 $\varphi: \dot{e}^\lambda \rightarrow X$ 是一个粘合映射, 那么任何同伦等价 $f: X \rightarrow Y$ 都可扩张为同伦等价

$$F: X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow Y \underset{f \circ \varphi}{\cup} e^\lambda.$$

证明. (按照 P. Hilton 的一篇未发表的文章). 映射 F 用下列条件定义:

$$\begin{cases} F|_X = f, \\ F|_{e^\lambda} = \text{恒等映射}. \end{cases}$$

令 $g: Y \rightarrow X$ 是 f 的同伦逆, 映射

$$G: Y \underset{f \circ \varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow Y \underset{g \circ f \circ \varphi}{\cup} e^\lambda$$

用对应的条件定义:

$$\begin{cases} G|_Y = g, \\ G|_{e^\lambda} = \text{恒等映射}. \end{cases}$$

由于 $g \circ f \circ \varphi$ 同伦于 φ , 从引理 3.6 可见, 存在同伦等价

$$k: X \underset{g \circ f \circ \varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda.$$

我们先证明: 复合映射

$$k \circ G \circ F: X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda$$

同伦于恒等映射.

令 h_t 是 $g \circ f$ 和恒等映射之间的同伦, 从 k , G 和 F 的各个定义可见

$$\begin{aligned} k \circ G \circ F(x) &= gf(x), & \text{对于 } x \in X \\ k \circ G \circ F(tu) &= 2tu, & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, u \in \dot{e}^\lambda \\ k \circ G \circ F(tu) &= h_{2-2t}\varphi(u), & \text{对于 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

于是, 所要的同伦

$$q_\tau: X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda$$

就用下面的公式来定义：

$$\begin{aligned} q_\tau &= h_\tau(x), && \text{对于 } x \in X \\ q_\tau &= \frac{2}{1+\tau}tu, && \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{2}, u \in \dot{e}^\lambda \\ q_\tau(tu) &= h_{2-2t+\tau}\varphi(u), && \text{对于 } \frac{1+\tau}{2} \leq t \leq 1, u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

因此, F 有左同伦逆。

根据下面的定理, 证明 F 是同伦等价的论证将完全是形式化的。

结论 5. 如果一个映射 F 有一个左同伦逆 L 和一个右同伦逆 R , 则 F 是一个同伦等价; 并且 R (或 L) 是一个两边同伦逆。

证明. 关系

$$L \circ F \simeq \text{恒等映射}, \quad F \circ R \simeq \text{恒等映射},$$

意味着

$$L \simeq L(F \circ R) = (L \circ F)R \simeq R.$$

因此

$$R \circ F \simeq L \circ F \simeq \text{恒等映射},$$

证明了 R 是一个两边同伦逆。 □

引理 3.7 的证明现在可以如下完成。关系

$$k \circ F \circ G \simeq \text{恒等映射},$$

说明 F 有一个左同伦逆; 并且一个类似的证明说明 G 有一个左同伦逆。

步骤一: 因为 $k(G \circ F) \simeq \text{恒等映射}$, 而 k 已知具有左同伦逆, 可得 $(G \circ F)k \simeq \text{恒等映射}$ 。

步骤二: 因为 $G(F \circ k) \simeq \text{恒等映射}$, 而 G 已知具有左同伦逆, 可得 $(F \circ k)G \simeq \text{恒等映射}$ 。

步骤三: 因为 $F(k \circ G) \simeq \text{恒等映射}$, 而 F 以 $k \circ G$ 作为左同伦逆, 可得 F 是一个同伦等价。

这完成了引理 3.7 的证明。 □

证明. (定理 3.5 的证明) 令 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$ 为 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 的临界值。因为每个 M^a 都是紧致集, 所以序列 $\{c_i\}$ 没有聚点。对于 $a < c_1$, 集合 M^a 是空集。假设 $a \neq c_1, c_2, c_3, \dots$, 并且 M^a 具有一个 CW 复形的同伦型。令 c 是所有 $c_i > a$ 的最小者。通过定理 3.1, 3.2 和 3.5, 当 ε 充分小时, 对于确定的映射 $\varphi_1, \dots, \varphi_{j(c)}$, $M^{c+\varepsilon}$ 具有 $M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$ 的同伦型, 并且存在同伦等价 $h: M^{c-\varepsilon} \rightarrow M^a$ 。我们已经假设: 存在同伦等价 $h': M^a \rightarrow K$, 其中 K 是一个 CW 复形。

于是每个 $h' \circ h \circ \varphi_j$ 通过胞腔逼近之后都同伦于一个映射

$$\psi_j: \dot{e}^{\lambda_j} \rightarrow K \text{ 的 } (\lambda_j - 1) \text{ - 维骨架.}$$

则 $K \cup_{\psi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\psi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$ 是一个 CW 复形, 并且根据引理 3.6 和 3.7, 它和 $M^{c+\varepsilon}$ 有相同的同伦型。

通过归纳法, 任何 M^a 都具有 CW 复形的同伦型。如果 M 是紧致的, 则证毕。如果 M 不是紧致的, 但所有临界点均在某个紧致集 M^a 内, 那么类似于定理 3.1 的证明, 可证明 M^a 是 M 的一个形变收缩核, 所以定理依然得证。

如果存在无穷多个临界点，则上面的构造给我们一个同伦等价的无穷序列

$$\begin{array}{ccccccc} M^{a_1} & \subset & M^{a_2} & \subset & M^{a_3} & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_1 & \subset & K_2 & \subset & K_3 & \subset & \dots \end{array}$$

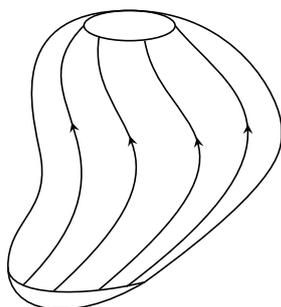
其中，每个映射都是前一个的扩张。令 K 表示直极限拓扑（即：可能的最细相容拓扑）中 K_i 的并，并且令 $g: M \rightarrow K$ 是极限映射。则 g 诱导所有维数的同伦群的同构。我们只需应用 [14] 的定理 1，就可以断定 g 是一个同伦等价。（Whitehead 的这个定理表述为：如果 M 和 K 都由 CW 复形所主导，则任意映射 $M \rightarrow K$ ，只要它诱导出各维数同伦群的同构，就必然是一个同伦等价。 K 当然由它本身主导。要证明 M 也是由 CW 复形所控制，只需把 M 看作某个 Euclid 空间中管状邻域的收缩核即可）。定理 3.5 证毕。□

注. 我们也证明了：每个 M^a 都具有有限 CW 复形的同伦型：对于 M^a 中每个指数为 λ 的临界点，这个复形有一个 λ 维胞腔。这个事实既是当 a 是一个临界值时也为真（见注 3.4）。

§ 4. 例子

作为 § 3 的定理的一个应用，我们证明：

定理 4.1 (Reeb). 若 M 是一个紧致流形， f 是 M 上一个可微函数，只有两个临界点，均非退化，则 M 同胚于球面。



证明. 这个定理是从定理 3.1 以及 Morse 引理 (引理 2.2) 得到的。两个临界点必为极小点与极大点。比如说， $f(p) = 0$ 是极小值， $f(q) = 1$ 是极大值。若 ε 充分小，则由引理 2.2 知，集合 $M^\varepsilon = f^{-1}[0, \varepsilon]$ 和 $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ 都是闭的 n 维胞腔。但通过定理 3.1， M^ε 同胚于 $M^{1-\varepsilon}$ 。因此， M 是两个闭 n 维胞腔 $M^{1-\varepsilon}$ 和 $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ 沿着它们的公共边缘拼起来的并。现在很容易构造出 M 和 S^n 之间的同胚映射。□

注. 即使这两个临界点退化，定理仍然为真。但是，证明更困难一些。（见 [16] 中定理 1；或者 [17] 的引理 1）。

注. 就 S^n 通常的微分结构而言， M 不必微分同胚于 S^n 。（见 [18]。在这篇文章中，通过在其上找到一个具有两个非退化临界点的函数，证明了一个带有非标准光滑结构的 7 维球面在拓扑上同胚于 S^7 。）

作为前面诸定理的另一个应用，我们注意到：如果一个 n 维流形上存在一个只有三个临界点的非退化函数，那么（通过 Poincaré 对偶）这些临界点的指标分别为 0， n 和 $\frac{n}{2}$ ，并且该流形同伦等价于在一个 $\frac{n}{2}$ 维球面再粘上一个 n 维胞腔。见 [19]。这种函数例如在实的或复的投影平面上就存在。

令 $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ 是复投影 n 维空间。我们将 $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ 视为复数 $(n+1)$ 元组 (z_0, \dots, z_n) 组成的等价类的集合满足 $\sum |z_j|^2 = 1$ 。 (z_0, \dots, z_n) 的等价类记为 $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$ 。

在 $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ 上定义一个实值函数 f :

$$f(z_0 : z_1 : \dots : z_n) = \sum c_j |z_j|^2,$$

其中, c_0, c_1, \dots, c_n 是各不相同的实常数。

为了确定 f 的临界点, 考虑下面的局部坐标系。令 U_0 是 $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$ 组成的集合满足 $z_0 \neq 0$, 并令

$$|z_0| \frac{z_j}{z_0} = x_j + iy_j.$$

则

$$x_1, y_1, \dots, x_n, y_n : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

是所要的坐标函数, 把 U_0 微分同胚地映射到 \mathbb{R}^{2n} 中的开单位球。显然,

$$|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2, \quad |z_0|^2 = 1 - \sum (x_j^2 + y_j^2),$$

所以在整个坐标邻域 U_0 中处处有

$$f = c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j - c_0)(x_j^2 + y_j^2).$$

因此 f 在 U_0 中只有一个临界点, 位于这个坐标系的中心点

$$p_0 = (1 : 0 : 0 : \dots : 0).$$

在这一点 f 是非退化的, 其指数等于满足 $c_j < c_0$ 的 j 的数的二倍。

类似地, 我们可以考虑另一个坐标系, 其中心点分别为

$$p_1 = (0 : 1 : 0 : \dots : 0), \dots, p_n = (0 : 0 : \dots : 0 : 1).$$

由此可得, p_0, p_1, \dots, p_n 是 f 仅有的临界点; f 在 p_k 处的指标等于满足 $c_j < c_k$ 的 j 的数的二倍。因此, 在 0 到 $2n$ 之间的每个可能的偶数都恰好是一个临界点的指标。通过定理 3.5:

$\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ 等价于形如

$$e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}$$

的 CW 复形。

从而, $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ 的整数同调群是

$$H_i(\mathbb{C}\mathbf{P}_n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 2, 4, \dots, 2n, \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

§ 5. Morse 不等式

Morse 原本处理这个主题的时候, 定理 3.5 不可用。 M 的拓扑与 M 上一个实值函数的临界点之间的关系则是用一组不等式来描述的。本节将描述这一原始观点。

定义. 令 S 是一个从某些空间的确定偶到整数的函数。 S 是次可加的 (*subadditive*), 如果当 $X \supset Y \supset Z$ 我们有 $S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z)$ 。如果等号成立, S 被称为可加的 (*additive*)。

作为一个例子, 把任何一个域 \mathbb{F} 作为系数群, 令

$$\begin{aligned} R_\lambda(X, Y) &= (X, Y) \text{ 的第 } \lambda \text{ 个 Betti 数} \\ &= H_\lambda(X, Y; \mathbb{F}) \text{ 在 } \mathbb{F} \text{ 上的秩,} \end{aligned}$$

其中, (X, Y) 是使得这个秩是有限的任意空间偶. R_λ 是次可加的, 这可通过考察 (X, Y, Z) 的正合序列的下面部分轻易验证:

$$\cdots \rightarrow H_\lambda(Y, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Y) \rightarrow \cdots$$

Euler 示性数 $\chi(X, Y)$ 是可加的, 其中 $\chi(X, Y) = \sum (-1)^\lambda R_\lambda(X, Y)$.

引理 5.1. 令 S 是次可加的, $X_0 \subset \cdots \subset X_n$. 则 $S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$. 如果 S 是可加的, 则等号成立.

证明. 对 n 用归纳法. $n=1$ 时等号显然成立, $n=2$ 的情况为 (次) 可加性的定义.

如果结论对 $n-1$ 为真, 则 $S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n-1} S(X_i, X_{i-1})$. 因此, $S(X_n, X_0) \leq S(X_{n-1}, X_0) + S(X_n, X_{n-1}) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$ 并且结论对 n 成立. \square

令 $S(X, \emptyset) = S(X)$. 在引理 5.1 中取 $X_0 = \emptyset$, 我们有

$$S(X_n) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1}) \quad (1)$$

如果 S 是可加的, 则等号成立.

令 M 是一个紧致流形而 f 是 M 上一个具有孤立、非退化、临界点的可微函数. 令 $a_1 < \cdots < a_k$, 使得 M^{a_i} 恰好含有 i 个临界点, 而 $M^{a_k} = M$. 于是

$$\begin{aligned} H_*(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) &= H_*(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}}) \\ &= H_*(e^{\lambda_i}, \dot{e}^{\lambda_i}) \quad (\text{据截除定理}) \\ &= \begin{cases} \text{系数群,} & \text{维数为 } \lambda_i \text{ 时,} \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases} \end{aligned}$$

其中, λ_i 是临界点的指标.

对于 $\emptyset = M^{a_0} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$ 和 $S = R_\lambda$ 应用方程 (1), 我们有

$$R_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^k R_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_\lambda;$$

其中, C_λ 表示指标为 λ 的临界点的个数. 把这个公式应用于 $S = \chi$ 的情况, 我们有

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_0 - C_1 + C_2 - \cdots \pm C_n.$$

这样, 我们就证明了

定理 5.2 (弱 Morse 不等式). 如果 C_λ 表示紧致流形 M 上指标为 λ 的临界点的个数, 则

$$R_\lambda(M) \leq C_\lambda, \quad (2)$$

$$\sum (-1)^\lambda R_\lambda(M) = \sum (-1)^\lambda C_\lambda. \quad (3)$$

稍强一些不等式可以由下面的讨论得证。

引理 5.3. 函数 S_λ 是次可加的, 其中

$$S_\lambda(X, Y) = R_\lambda(X, Y) - R_{\lambda-1}(X, Y) + R_{\lambda-2}(X, Y) - \cdots \pm R_0(X, Y).$$

证明. 给定向量空间的一个正合序列

$$\xrightarrow{h} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} \cdots \longrightarrow D \longrightarrow 0.$$

注意到同态映射 h 的秩加上 i 的秩等于 A 的秩, 因此,

$$\begin{aligned} \text{rank } h &= \text{rank } A - \text{rank } i \\ &= \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } j \\ &= \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } C - \text{rank } k \\ &\quad \cdots \\ &= \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } C - \cdots \pm \text{rank } D. \end{aligned}$$

因此, 最后一个表达式是 ≥ 0 . 现在考虑一个三元组 $X \supset Y \supset Z$ 的同调正合序列. 将这个计算应用到同态映射

$$H_{\lambda+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_\lambda(Y, Z),$$

我们看到

$$\text{rank } \partial = R_\lambda(Y, Z) - R_\lambda(X, Z) + R_\lambda(X, Y) - R_{\lambda-1}(Y, Z) + \cdots \geq 0.$$

合并同类项, 即得

$$S_\lambda(Y, Z) - S_\lambda(X, Z) + S_\lambda(X, Y) \geq 0.$$

证毕. □

将 S_λ 这个次可加函数应用到空间

$$\emptyset \subset M^{a_1} \subset M^{a_2} \subset \cdots \subset M^{a_k},$$

我们得到 **Morse 不等式 (Morse inequalities)**:

$$S_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^k S_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = c_\lambda - c_{\lambda-1} + \cdots \pm c_0,$$

或者

$$R_\lambda(M) - R_{\lambda-1}(M) + \cdots \pm R_0(M) \leq c_\lambda - c_{\lambda-1} + \cdots \pm c_0. \quad (4_\lambda)$$

这些不等式的确比前面的不等式强一些. 事实上, 将 (4_λ) 和 $(4_{\lambda-1})$ 相加, 得到 (2_λ) ; 当 $\lambda > n$ 时, 比较 (4_λ) 和 $(4_{\lambda-1})$, 则得到等式 (3).

为了说明 Morse 不等式的用处, 让我们假设 $c_{\lambda+1} = 0$, 于是 $R_{\lambda+1}$ 也必须是零. 比较不等式 (4_λ) 和 $(4_{\lambda+1})$, 我们看出

$$R_\lambda - R_{\lambda-1} + \cdots \pm R_0 = c_{\lambda-2} - c_{\lambda-3} + \cdots \pm c_0.$$

现在假设 $c_{\lambda-1}$ 也是零, 于是 $R_{\lambda-1} = 0$. 同理可证

$$R_{\lambda-2} - R_{\lambda-3} + \cdots \pm R_0 = c_{\lambda-2} - c_{\lambda-3} + \cdots \pm c_0.$$

前面的等式减去这个等式, 我们得到下面的推论:

推论 5.4. 如果 $c_{\lambda+1} = c_{\lambda-1} = 0$, 则 $R_\lambda = c_\lambda$, 且 $R_{\lambda+1} = R_{\lambda-1} = 0$.

(当然, 这个结果也可以从定理 3.5 得到)。注意, 这个推论使我们能够求得复投影空间的同调群 (见 § 4) 而无须用定理 3.5。

§ 6. Euclid 空间中的流形

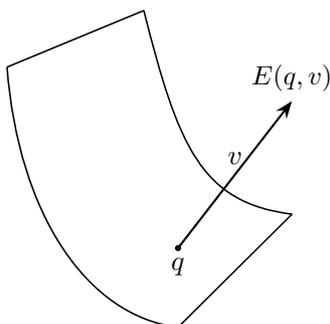
尽管我们迄今所考虑的只是流形上没有退化临界点的函数, 可是我们却还不曾证明: 这种函数总是存在。在这一节中, 我们将在嵌入 \mathbb{R}^n 的任意流形上构造许多没有退化临界点的函数。事实上, 如果对于固定的 $p \in \mathbb{R}^n$ 定义函数 $L_p: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $L_p(q) = \|p - q\|^2$, 那么, 对于几乎一切 p , 函数 L_p 只有非退化临界点。

令 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是一个流形, 其维数 $k < n$, 微分嵌入 \mathbb{R}^n 。令 $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ 定义为

$$N = \{(q, v) : q \in M, v \text{ 在 } q \text{ 处垂直于 } M\}.$$

不难证明: N 是一个 n 维流形, 微分嵌入 \mathbb{R}^{2n} 。(N 为 M 的法向量丛的全空间)。

令 $E: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 $E(q, v) = q + v$ (E 为“终点映射”)。



定义. $e \in \mathbb{R}^n$ 称为 (M, q) 的**焦点 (focal point)**, 具有**重数 (multiplicity)** μ , 如果 $e = q + v$, 其中 $(q, v) \in N$, E 在 (q, v) 处的 *Jacobi* 矩阵具有零化数 $\mu > 0$ 。点 e 称为 M 的**焦点**, 如果对于某个 $q \in M$, e 是 (M, q) 的**焦点 (focal point)**。

直观来说, M 的焦点是 \mathbb{R}^n 中一个点, 使得邻近的流形在该处相交。

我们将用到下面这个定理, 而不证明。

定理 6.1 (Sard). 如果 M_1 和 M_2 是两个有可数基、维数相同的微分流形, 并且 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 是 C^1 映射, 那么临界点集的像在 M_2 中具有测度 0。

f 的临界点是使得 f 的 *Jacobi* 矩阵为奇异矩阵的点。定理 6.1 的证明见 [20]。

推论 6.2. 对于几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$, 点 x 不是 M 的焦点。

证明. 我们刚才已经看到 N 是一个 n 维流形。点 x 是焦点, 当且仅当 x 属于 $E: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的临界点集的像。因此焦点集具有测度 0。□

为了更好地理解焦点这个概念, 比较方便的是引入 Euclid 空间中流形的“第二基本形式”。我们不尝试给出一个不变的定义, 但是将使用固定局域坐标系。

令 u^1, \dots, u^k 是流形 $M \subset \mathbb{R}^n$ 上一个区域的坐标。则从 M 到 \mathbb{R}^n 的包含映射确定 n 个光滑函数

$$x_1(u^1, \dots, u^k), \dots, x_n(u^1, \dots, u^k).$$

这些函数将简记为 $\vec{x}(u^1, \dots, u^k)$, 其中 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 。为一致起见, 点 $q \in M \subset \mathbb{R}^n$ 现在也记为 \vec{q} 。

与坐标系相关的第一基本形式 (the first fundamental form) 定义为实值函数组成的对称矩阵

$$(g_{ij}) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} \right).$$

另一方面, 第二基本形式 (the second fundamental form) 是向量值函数组成的对称矩阵 $(\vec{\ell}_{ij})$ 。

这个矩阵定义如下: 向量 $\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j}$ 在 M 的某一点处可以表述为 M 的一个切向量和 M 的一个法向量之和。定义 $\vec{\ell}_{ij}$ 为 $\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j}$ 的法向分量。给定 \vec{v} 是 M 在 \vec{q} 处的一个任意单位向量, 矩阵

$$\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right) = (\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$$

可以称为“ M 在 \vec{q} 处沿方向 \vec{v} 的第二基本形式”。

为简化讨论, 假设所选的坐标系使得 (g_{ij}) 在 \vec{q} 的值是单位矩阵。则矩阵 $(\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$ 的特征值 K_1, \dots, K_k 称为 M 在 \vec{q} 处沿法方向 \vec{v} 的主曲率 (principal curvature)。它们的倒数 $K_1^{-1}, \dots, K_k^{-1}$ 称为主曲率半径 (principal radii of curvature)。当然, 可能遇到 $(\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$ 是奇异矩阵的情况。在这种情况下, 各个 K_i 中将有一个或更多个为零, 因而对应的曲率半径 K_i^{-1} 不确定。

现在考虑由所有的 $\vec{q} + t\vec{v}$ 组成的法线 ℓ , 其中 \vec{v} 是一个固定的单位向量, 在 \vec{q} 处与 M 正交。

引理 6.3. (M, \vec{q}) 沿 ℓ 的焦点正好是 $\vec{q} + K_i^{-1}\vec{v}$ 这些点, 其中 $1 \leq i \leq k$, $K_i \neq 0$ 。因此, (M, \vec{q}) 沿着 ℓ 最多有 k 个焦点, 每个焦点都是按其重数计算的。

证明. 选取流形上 $n-k$ 个向量场 $\vec{w}_1(u^1, \dots, u^k), \dots, \vec{w}_{n-k}(u^1, \dots, u^k)$ 使得 $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}$ 是单位向量, 彼此正交, 且均与 M 正交。我们可以在流形 $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ 上引入坐标 $(u^1, \dots, u^k, t^1, \dots, t^{n-k})$ 如下: 令 $(u^1, \dots, u^k, t^1, \dots, t^{n-k})$ 对应于点

$$\left(\vec{x}(u^1, \dots, u^k), \sum_{\alpha=1}^{n-k} t^\alpha \vec{w}_\alpha(u^1, \dots, u^k) \right) \in N.$$

则函数

$$E: N \rightarrow \mathbb{R}^n$$

产生对应关系

$$(u^1, \dots, u^k, t^1, \dots, t^{n-k}) \xrightarrow{E} \vec{x}(u^1, \dots, u^k) + \sum_{\alpha=1}^{n-k} t^\alpha \vec{w}_\alpha(u^1, \dots, u^k),$$

具有下面的偏导数

$$\frac{\partial \vec{e}}{\partial u^i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i},$$

$$\frac{\partial \vec{e}}{\partial t^\beta} = \vec{w}_\beta.$$

对这些 n 个向量与线性无关的向量 $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^k}, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}$ 逐一取内积得到一个 $n \times n$ 矩阵, 这个矩阵的秩等于 E 在对应点处的 Jacobi 矩阵的秩。

这个 $n \times n$ 矩阵显然有下面的形式

$$\left(\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \sum_{\alpha} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} \right) & \left(\sum_{\alpha} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \vec{w}_\beta \right) \\ 0 & \text{单位矩阵} \end{array} \right).$$

因此, 它的秩等于左上角的分块矩阵的秩再加上 $n - k$ 。利用恒等式

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\vec{w}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} \right) = \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \vec{w}_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j},$$

我们看到左上角分块矩阵正好就是矩阵

$$\left(g_{ij} - \sum_{\alpha} t^{\alpha} \vec{w}_\alpha \cdot \vec{\ell}_{ij} \right).$$

因此:

结论 6.4. $\vec{q} + t\vec{v}$ 是 (M, \vec{q}) 的重数为 μ 的焦点, 当且仅当矩阵

$$\left(g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij} \right) \quad (*)$$

是零化数为 μ 的奇异矩阵。

现在假设 (g_{ij}) 是单位矩阵, 则 $(*)$ 是奇异的当且仅当 $\frac{1}{t}$ 是矩阵 $(\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$ 的一个特征值。此外, 重数 μ 等于 $\frac{1}{t}$ 作为特征值的重数, 引理 6.3 证毕。□

现在对于固定的 $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$, 让我们来研究函数

$$L_{\vec{p}} = f : M \rightarrow \mathbb{R},$$

其中

$$\begin{aligned} f(\vec{x}(u^1, \dots, u^k)) &= \|\vec{x}(u^1, \dots, u^k) - \vec{p}\|^2 \\ &= \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

我们有

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot (\vec{x} - \vec{p}).$$

因此, f 在 \vec{q} 处有一个临界点当且仅当 $\vec{q} - \vec{p}$ 是 M 在 \vec{q} 处的法向量。

在临界点处的二阶偏导数是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \right).$$

如引理 6.3 所证明, 令 $\vec{p} = \vec{x} + t\vec{v}$, 这变成

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \left(g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij} \right).$$

因此:

引理 6.5. 点 $\vec{q} \in M$ 是 $f = L_{\vec{p}}$ 的退化临界点当且仅当 \vec{p} 是 (M, \vec{q}) 的焦点。 \vec{q} 作为临界点的零化数等于 \vec{p} 作为焦点的重数。

把这个结果同 Sard 定理的推论 6.2 结合起来, 我们立即得到

定理 6.6. 对于几乎所有 $p \in \mathbb{R}^n$ (即除了一个测度为零的集合外), 函数

$$L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$$

没有退化临界点。

这个定理还有几个有趣的推论。

推论 6.7. 在任意流形 M 上都存在没有退化临界点的可微函数, 使得每个 M^a 都是紧致的。

证明. 根据定理 6.6 以及 n 维流形 M 可以微分嵌入 \mathbb{R}^{2n+1} 作为一个闭子集的事实 (见 [21], 113 页) 得证。□

应用 1. 微分流形具有 CW 复形的同伦型。这是从上述推论以及定理 3.5 推出的。

应用 2. 在紧致流形 M 上存在向量场 X , 使得 X 的临界点的指标之和等于 M 的 Euler 示性数 $\chi(M)$ 。证明如下: 对于 M 上任意可微函数 f , 我们有 $\chi(M) = \sum (-1)^\lambda c_\lambda$, 其中 c_λ 是指标为 λ 的临界点的个数, 但是, 在 f 的指标为 λ 的一点处, 向量场 $\text{grad } f$ 的指标是 $(-1)^\lambda$ 。

由此可见, M 上任意向量场的指标之和都等于 $\chi(M)$, 因为这个和数是一个拓扑不变量 (见 [22], § 39.7)。

上面的推论可以加强如下。令 $k \geq 0$ 是一个整数, $K \subset M$ 是紧致集。

推论 6.8. 任意有界光滑函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 均可用无退化临界点的光滑函数 g 来均匀逼近。此外, 可以选择函数 g , 使得对于 $i \leq k$ 时, g 的 i 阶导数在紧致集 K 上也均匀逼近 f 的对应导数。(见 [23])。

证明. 选择一个嵌入映射 $h: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, 把 M 嵌入某个 Euclid 空间作为有界子集, 使得第一个坐标 h_1 正好是已知函数 f 。令 c 是一个充分大的数。在点 $(-c, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ 的附近选取一点

$$p = (-c + \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n),$$

使得函数 $L_p: M \rightarrow \mathbb{R}$ 非退化。令

$$g(x) = \frac{L_p(x) - c^2}{2c},$$

g 显然是非退化的。通过简单的计算, 我们有

$$g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{h_i(x)^2}{2c} - \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i h_i(x)}{c} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{2c} - \varepsilon_1.$$

显然, 如果 c 充分大且 ε_i 充分小, 则 g 将如要求逼近 f 。□

上面的理论也可以用来描述函数

$$L_p: M \rightarrow \mathbb{R}$$

在一个临界点处的指标。

引理 6.9 (L_p 的指标定理). L_p 在一个非退化临界点 $q \in M$ 处的指标等于 (M, q) 在从 q 到 p 的线段上的焦点数, 每个焦点都是按其重数计算的。

第三章中有一个类似的命题 (Morse 指标定理) 是非常重要的。

证明. 矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 L_p}{\partial u^i \partial u^j} \right) = 2(g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$$

的指标等于负特征值的个数。假设 (g_{ij}) 是单位矩阵, 这个指标就等于 $(\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$ 的特征值中 $\geq \frac{1}{t}$ 的个数。把这个论述与引理 6.3 比较就得到所要的结论。□

§ 7. 超平面截面上的 Lefschetz 定理

作为已经建立的那些理论的应用, 我们来证明某些有关代数簇的拓扑结构的结果, 这些结果本来是 Lefschetz 利用完全不同的论证证明的, 我们现在的讲法属于 Andreotti 和 Frankel³。

定理 7.1. 如果 $M \subset \mathbb{C}^n$ 是 n 维复空间的非奇异仿射代数簇, 它的实维数为 $2k$, 则在 $i > k$ 时, $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ 。

这是下述更强的定理的推论。

定理 7.2. 令 M 是一个复解析流形, 其复维数为 k , 双解析嵌入 \mathbb{C}^n 作为闭子集, 则 M 具有 k 维 CW 复形的同伦型。

证明分为以下几步: 首先考虑 k 个复变量的二次型

$$Q(z^1, \dots, z^k) = \sum b_{nj} z^h z^j.$$

如果我们用 $x^h + iy^h$ 来代替 z^h , 然后取 Q 的实部, 我们就得到具有 $2k$ 个变量的一个实二次型:

$$Q'(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^k) = \sum b_{nj} (x^h + iy^h)(x^j + iy^j) \text{ 的实部}.$$

结论 1. 如果 e 是 Q' 的 μ 重特征值, 则 $-e$ 也是一个特征值, 并且具有同样的重数 μ 。

证明. 恒等式 $Q(iz^1, \dots, iz^k) = -Q(z^1, \dots, z^k)$ 表明: 二次型 Q' 可以通过变量的正交变换变成 $-Q'$ 。由此显然得到结论 1。□

现在考虑一个复流形 M , 双解析嵌入 \mathbb{C}^n 作为闭子集。令 q 是 M 的一点。

结论 2. (M, q) 沿任意法线 ℓ 的焦点成对出现, 对称地分布在 q 的两侧。

另一方面, 如果 $q + tv$ 是焦点, 则 $q - tv$ 也是焦点, 并且具有同样的重数。

证明. 在 q 的一个邻域内取 M 的复坐标 z^1, \dots, z^k , 使得 $z^1(q) = \dots = z^k(q) = 0$ 。包含映射 $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ 确定 n 个复解析函数

$$w_\alpha = w_\alpha(z^1, \dots, z^k), \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

令 v 是固定单位向量, 在 q 处与 M 正交。考虑 w 和 v 的 Hermite 内积

$$\sum w_\alpha \bar{v}_\alpha = \sum w_\alpha(z^1, \dots, z^k) \bar{v}_\alpha,$$

它可以展开为复幂级数:

$$\sum w_\alpha(z^1, \dots, z^k) \bar{v}_\alpha = \text{常数} + Q(z^1, \dots, z^k) + \text{高阶项},$$

其中, Q 表示一个二次齐次函数 (因为 v 与 M 正交, 所以不出现线性项)。

现在用 $x^h + iy^h$ 来代替 z^h 以得到 M 的一个实坐标系并考虑实内积

$$w \cdot v = \sum w_\alpha \bar{v}_\alpha \text{ 的实部}$$

它具有实幂级数展开:

$$w \cdot v = \text{常数} + Q'(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^k) + \text{高次项},$$

³见 [24] 和 [25]。

其中, 二次型 Q' 显然确定 M 在 q 处沿法方向 v 的第二基本形式。按照结论 1, Q' 的特征值是正负成对出现的, 所以 (M, q) 沿通过 q 和 $q+v$ 的直线的焦点也是对称地成对出现, 这就证明了结论 2。 \square

我们现在准备好证明定理 7.2。

证明. (定理 7.2 的证明) 选取点 $p \in \mathbb{C}^n$ 使得距离平方函数

$$L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$$

没有退化临界点。因为 M 是 \mathbb{C}^n 的闭子集, 显然可见, 每个集合

$$M^a = L_p^{-1}[0, a]$$

是紧致的。现在考虑 L_q 在临界点 q 处的指标, 按照引理 6.9, 这个指标等于 (M, q) 在从 p 到 q 的线段上的焦点个数。但是, 沿着通过 p 和 q 的整个直线上至多有 $2k$ 个焦点, 对称地分布在 q 的两侧, 因而至多只有 k 个焦点位于 p 和 q 之间。

于是, L_p 在 q 处的指标 $\leq k$, 可见 M 和一个维数 $\leq k$ 的 CW 复形有相同的同伦型, 定理 7.2 证毕。 \square

推论 7.3 (Lefschetz). 令 V 是复投影空间 $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ 中的一个代数簇, 其复维数是 k 。 P 是 $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ 中的一张超平面, 含有 V 的奇点 (如果存在的话)。因此, 包含映射

$$V \cap P \rightarrow V$$

诱导维数小于 $k-1$ 的各同调群的同构。此外, 诱导同态

$$H_{k-1}(V \cap P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{k-1}(V; \mathbb{Z})$$

是满射。

证明. 利用空间偶 $(V, V \cap P)$ 的正合序列, 显然只须证明: $r \leq k-1$ 时, $H_r(V, V \cap P; \mathbb{Z}) = 0$ 。但 Lefschetz 对偶定理断言

$$H_r(V, V \cap P; \mathbb{Z}) \cong H^{2k-r}(V \setminus (V \cap P); \mathbb{Z}).$$

但 $V - (V \cap P)$ 是仿射空间 $\mathbb{C}\mathbf{P}_n - P$ 中的非奇异代数簇, 因此从定理 7.2 得到对于 $r \leq k-1$, 上式右端的群是零群。 \square

这个结果可以加强如下:

定理 7.4 (Lefschetz). 在上面推论的假设下, 当 $r < k$ 时, 对应的同伦群 $\pi_r(V, V \cap P)$ 是零。

证明. 这个证明将基于下述事实: 存在 $V \cap P$ 的一个邻域 U , 可以在 V 中形变到 $V \cap P$ 。这个事实, 例如, 可以用代数簇可剖分定理来证明。

代替函数 $L_p : V \setminus (V \cap P) \rightarrow \mathbb{R}$, 我们将用 $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, 定义为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{对于 } x \in V \cap P, \\ \frac{1}{L_p}, & \text{对于 } x \notin P. \end{cases}$$

因为 L_p 的临界点的指标 $\leq k$, 可见 f 的临界点的指标 $\geq 2k - k = k$ 。函数 f 在 $\varepsilon \leq f < \infty$ 时没有退化临界点, 所以 V 的同伦型与 $V^\varepsilon = f^{-1}[0, \varepsilon]$ 粘上有限多个维数 $\geq k$ 的胞腔后的同伦型相同。

选取 ε 充分小, 使得 $V^\varepsilon \subset U$ 。令 I^r 表示 r 维单位方体。则因为 $r < k$, 每个把 (I^r, \dot{I}^r) 映射到 $(V, V \cap P)$ 的映射都可以形变为一个映射

$$(I^r, \dot{I}^r) \rightarrow (V^\varepsilon, V \cap P) \subset (U, V \cap P),$$

因此, 可以形变为映入 $(V \cap P)$ 的映像, 证毕。 □

第二章 Riemann 几何速成课程

§ 8. 协变微分

第二章的目的是快速概述 Riemann 几何中的一些基本概念，这些概念将在后续内容中需要用到。至于详细情况，读者可以参考下列书籍：[11]，[26]，[27] 或 [28]。

令 M 是一个光滑流形。

定义. 在点 $p \in M$ 处的仿射联络 (*affine connection*) 是一个函数：对于每个切向量 $X_p \in TM_p$ 和每个向量场 Y ，相应地给出一个新向量

$$X_p \vdash Y \in TM_p,$$

称为 Y 沿方向 X_p 的协变导数 (*covariant derivative*)¹。仿射联络作为 X_p 和 Y 的函数，我们要求它是双线性的。此外，如果

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

是一个实值函数， fY 表示向量场

$$(fY)_q = f(q)Y_q,$$

那么我们还要求 \vdash 满足下面的恒等式：

$$X_p \vdash (fY) = (X_p f)Y_p + f(p)X_p \vdash Y.$$

(照例， $X_p f$ 表示 f 沿 X_p 方向的方向导数)。

M 上的整体性仿射联络 (或简称联络) 是一个函数：对于每个 $p \in M$ ，相应地给出 M 在 p 处的一个仿射联络 \vdash_p ，满足下列光滑条件：

(1) 若 X 和 Y 是 M 上两个光滑向量场，则由恒等式

$$(X \vdash Y)_p = X_p \vdash_p Y$$

所定义的向量场 $X \vdash Y$ 也必须是光滑的。

注意，自然还有

(2) $X \vdash Y$ 作为 X 和 Y 的函数是双线性的，

(3) $(fX) \vdash Y = f(X \vdash Y)$ ，

(4) $X \vdash (fY) = (Xf)Y + f(X \vdash Y)$ 。

¹这里的 $X \vdash Y$ 与 Nomizu 的记号 $\nabla_X Y$ 是一致的，我们的记号是想要暗示微分算子 X 作用于向量场 Y 。

条件 (1), (2), (3), (4) 也可以作为联络的定义。

借助于坐标邻域 $U \subset M$ 上定义的局域坐标 u^1, \dots, u^n , 联络 \vdash 由 U 上的 n^3 个光滑实值函数 Γ_{ij}^k 确定如下: 令 ∂_k 表示 U 上的向量场 $\frac{\partial}{\partial u^k}$, 于是 U 上任何向量场 X 可以唯一表示为

$$X = \sum_{k=1}^n x^k \partial_k,$$

其中, x^k 是 U 上的实值函数。特别是向量场 $\partial_i \vdash \partial_j$ 可以表述为

$$(5) \quad \partial_i \vdash \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Γ_{ij}^k 这些函数完全确定 U 上的联络。事实上, 给定向量场 $X = \sum x^i \partial_i$ 和 $Y = \sum y^j \partial_j$, 我们可以根据规则 (2), (3), (4) 来展开 $X \vdash Y$, 得到公式

$$(6) \quad X \vdash Y = \sum_k \left(\sum_i x^i y_{,i}^k \right) \partial_k,$$

其中, 符号 $y_{,i}^k$ 表示实值函数

$$y_{,i}^k = \partial_i y^k + \sum_j \Gamma_{ij}^k y^j.$$

反之, 给定 U 上的任意光滑实值函数 Γ_{ij}^k , 我们可以用公式 (6) 来定义 $X \vdash Y$, 结果显然满足条件 (1), (2), (3), (4), (5)。

我们可以用联络 \vdash 来定义一个向量场沿 M 上一条曲线的协变导数。先给出一些定义。

M 上的**参数曲线 (parametrized curve)** 是一个从实数到 M 的光滑函数 c 。沿曲线 c 的**向量场 V (vector field V along the curve c)** 是一个函数: 对于每个 $t \in \mathbb{R}$ 对应给出一个切向量

$$V_t \in TM_{c(t)}.$$

我们要求这个函数是光滑的, 光滑的意思是: 对于 M 上任意光滑函数 f , 对应关系

$$t \rightarrow V_t f$$

应该定义 \mathbb{R} 上一个光滑函数。

作为一个例子, 曲线 c 的**速度 (velocity) 向量场 $\frac{dc}{dt}$** 就是沿 c 的一个向量场, 由下面的规则定义:

$$\frac{dc}{dt} = c_* \frac{d}{dt},$$

其中 $\frac{d}{dt}$ 表示实数直线上的标准向量场, 而

$$c_* : T\mathbb{R}_t \rightarrow TM_{c(t)}$$

表示映射 c 诱导的切空间的同态。(见图 8.1)。

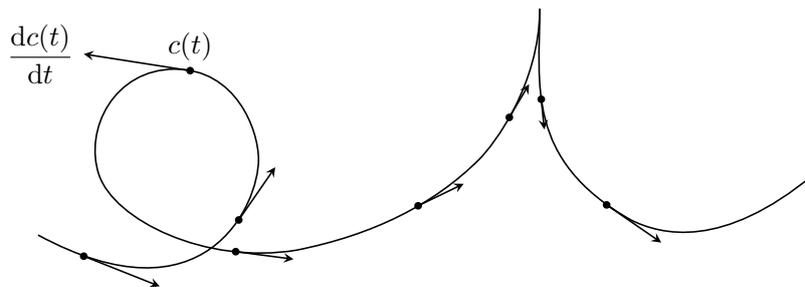


图 8.1

现在假设 M 上已经提供了仿射联络, 则沿着 c 的任意向量场 V 确定一个新的沿着 c 的向量场 $\frac{DV}{dt}$, 称为 V 的协变导数。运算

$$V \rightarrow \frac{DV}{dt}$$

是由下面三个公理来刻画的:

(a) $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$,

(b) 若 f 是 \mathbb{R} 上的光滑实值函数, 则

$$\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$$

(c) 如果 V 由 M 上的向量场 Y 诱导出, 即是对每个 t 有 $V_t = Y_{c(t)}$, 则 $\frac{DV}{dt}$ 等于 $\frac{dc}{dt} \lrcorner Y$ (= Y 沿 c 的速度向量方向的协变导数)。

引理 8.1. 有且仅有一个运算 $V \rightarrow \frac{DV}{dt}$ 满足这三个条件。

证明. 选取 M 的一个局部坐标系, 令 $u^1(t), \dots, u^n(t)$ 表示点 $c(t)$ 的坐标, 则向量场 V 可以唯一地表示为形式

$$V = \sum v^j \partial_j$$

其中, v^1, \dots, v^n 是 \mathbb{R} (或者 \mathbb{R} 的一个合适的开子集) 上的实值函数, $\partial_1, \dots, \partial_n$ 是坐标邻域上的标准向量场。从 (a), (b) 和 (c) 得

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \sum_j \left(\frac{dv^j}{dt} \partial_j + v^j \frac{dc}{dt} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{du^i}{dt} \Gamma_{ij}^k v^j \right) \partial_k. \end{aligned}$$

反之, 用这个公式来定义 $\frac{DV}{dt}$, 不难验证, 条件 (a), (b) 和 (c) 都满足。□

沿 c 的一个向量场 V 称为**平行向量场 (parallel vector field)**, 如果协变导数 $\frac{DV}{dt}$ 恒为零。

引理 8.2. 给定一条曲线 c 和在点 $c(0)$ 的一个切向量 V_0 , 存在唯一扩张 V_0 为一个沿 c 的平行向量场 V 。

证明. 微分方程

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{du^i}{dt} \Gamma_{ij}^k v^j = 0$$

的解 $v^k(t)$ 由原始值 $v^k(0)$ 唯一确定。由于这些方程是线性的, 所以它的解可以对 t 的所有有关的值有定义。(见 [12], 第 152 页)。□

向量 V_t 称为由 V_0 沿 c 平移而得。

现在假设 M 是一个 Riemann 流形。两个向量 X_p, Y_p 的内积记为 $\langle X_p, Y_p \rangle$ 。

定义. 如果平移保持内积不变, M 上的一个联络 \lrcorner 称为与 M 的 Riemann 度规**相容 (compatible)**。另一方面, 对于任意参数曲线 c 和任意一对沿 c 的平行向量场 P 和 P' , 内积 $\langle P, P' \rangle$ 应该是常数。

引理 8.3. 假设联络和度规相容, V, W 是任意两个沿 c 的向量场, 则

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

证明. 选取沿 c 的平行向量场 P_1, \dots, P_n , 在 c 的一点处两两正交, 因此在 c 的每一点处都两两正交。则给定的向量场 V 和 W 分别被表述为 $\sum v^i P_i$ 和 $\sum w^j P_j$ (其中 $v^i = \langle V, P_i \rangle$ 是 \mathbb{R} 上的实值函数)。由此可得 $\langle V, W \rangle = \sum v^i w^i$ 和

$$\frac{DV}{dt} = \sum \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum \frac{dw^j}{dt} P_j.$$

因此

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum \left(\frac{dv^i}{dt} w_i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle,$$

证毕。 \square

推论 8.4. 对于任意 M 上的向量场 Y, Y' 和任意向量 $X_p \in TM_p$:

$$X_p \langle Y, Y' \rangle = \langle X_p \lrcorner Y, Y'_p \rangle + \langle Y_p, X_p \lrcorner Y' \rangle.$$

证明. 选取曲线 c , 使得它在 $t = 0$ 处的速度向量是 X_p , 再应用引理 8.3 即可。 \square

定义 8.5. 一个联络 \lrcorner 被称为是**对称的 (symmetric)**, 如果它满足恒等式²

$$(X \lrcorner Y) - (Y \lrcorner X) = [X, Y].$$

(像往常一样, $[X, Y]$ 记为两个向量场的 *Poisson* 括号 $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$)。把这个恒等式应用于 $X = \partial_i, Y = \partial_j$ 的情况, 因为 $[\partial_i, \partial_j] = 0$, 我们得到关系

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0.$$

反之, 如果 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, 则使用公式 (6), 不难验证: 联络 \lrcorner 在整个坐标邻域中是对称的。

引理 8.6 (Riemann 几何基本引理). 一个 *Riemann* 流形有且仅有一个对称联络和它的度规相容。

(见 [11], 第 76 页和 [28], 第 95 页)。

唯一性证明: 应用推论 8.4 于向量场 $\partial_i, \partial_j, \partial_k$, 并令 $\langle \partial_j, \partial_k \rangle = g_{jk}$, 我们得到恒等式

$$\partial_i g_{jk} = \langle \partial_i \lrcorner \partial_j, \partial_k \rangle + \langle \partial_j, \partial_i \lrcorner \partial_k \rangle.$$

交换 i, j 和 k 的次序, 就给出关于下面这三个量

$$\langle \partial_i \lrcorner \partial_j, \partial_k \rangle, \langle \partial_i \lrcorner \partial_k, \partial_j \rangle \text{ 和 } \langle \partial_k \lrcorner \partial_j, \partial_i \rangle$$

的三个线性方程 (因为 $\partial_i \lrcorner \partial_j = \partial_j \lrcorner \partial_i$, 所以上面那种量只有三个)。这些方程可以被唯一地解出, 产生**第一 Christoffel 恒等式 (first Christoffel identity)**

$$\langle \partial_i \lrcorner \partial_j, \partial_k \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

这个恒等式的左端等于 $\sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k}$ 。用矩阵 $(g_{\ell k})$ 的逆矩阵 $(g^{k\ell})$ 相乘, 就得到**第二 Christoffel 恒等式 (second Christoffel identity)**

$$\Gamma_{ij}^{\ell} = \sum_k \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{\ell k}.$$

²下面这种重新阐述可能 (也可能不) 看起来更直观一些)。定义实值函数 f 沿两个向量 X_p, Y_p 的“二阶协变导数”为表达式

$$X_p(Yf) - (X_p \lrcorner Y)f,$$

其中, Y 记为 Y_p 的任意扩张向量场。可以验证: 这个表达式不依赖于 Y 的选择 (见下面引理 9.1 的证明)。则联络是对称的, 如果上述二阶导数作为 X_p 和 Y_p 的函数是对称的。

因此, 联络是由度规唯一确定的。

反之, 用这个公式定义 Γ_{ij}^l , 我们可以验证所得到的联络是对称的且与度规相容。证毕。 \square

关于对称性的另一种表述将在后续讨论中非常有用。考虑 M 中的“参数曲面”, 即一个光滑函数

$$s: \mathbb{R}^2 \rightarrow M.$$

所谓一个沿 s 的向量场 V (vector field V along s) 是指一个函数: 对于每个 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 相应地分配一个切向量

$$V_{(x,y)} \in TM_{s(x,y)}.$$

例如, 两个标准向量场 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$ 产生沿 s 的两个向量场 $s_* \frac{\partial}{\partial x}$ 和 $s_* \frac{\partial}{\partial y}$, 它们简记为 $\frac{\partial s}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial s}{\partial y}$, 称为 s 的“速度向量场”。

对于任意沿 s 的光滑向量场 V , 协变导数 (covariant derivatives) $\frac{DV}{\partial x}$ 和 $\frac{DV}{\partial y}$ 是新向量场, 构造如下: 对于每个固定的 y_0 , 限制 V 在曲线

$$x \mapsto s(x, y_0)$$

上, 我们得到沿这条曲线的一个向量场, 它关于 x 的协变导数定义为 $\left(\frac{DV}{\partial x}\right)_{(x,y_0)}$ 。这样沿着整个参数曲面 s 定义了 $\frac{DV}{\partial x}$ 。

例如, 我们可以求出两个向量场 $\frac{\partial s}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial s}{\partial y}$ 的两个协变导数。导数 $\frac{D}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x}$ 和 $\frac{D}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y}$ 不过就是合适的坐标曲线的加速度向量。然而, 混合导数 $\frac{D}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y}$ 和 $\frac{D}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x}$ 不能这样简单地描述。

引理 8.7. 如果联络是对称的, 则

$$\frac{D}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{D}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x}.$$

证明. 用局部坐标系来表示等式两端, 加以计算即可。 \square

§ 9. 曲率张量

一个仿射联络 \vdash 的曲率张量 (curvature tensor) R 可以测量二阶协变导数 $\partial_i \vdash (\partial_j \vdash Z)$ 关于 i 和 j 成对称的程度。给定向量场 X, Y, Z , 定义一个新的向量场 $R(X, Y)Z$ 为³

$$R(X, Y)Z = -X \vdash (Y \vdash Z) + Y \vdash (X \vdash Z) + [X, Y] \vdash Z.$$

引理 9.1. $R(X, Y)Z$ 在点 $p \in M$ 的值只依赖于在这点 p 处的向量 X_p, Y_p, Z_p , 而不依赖于各个向量场在邻近各点的值。此外, 对应关系

$$(X_p, Y_p, Z_p) \mapsto R(X_p, Y_p)Z_p$$

从 $TM_p \times TM_p \times TM_p$ 映射到 TM_p 是三线性的。

简言之, 这个引理可以表述为: R 是一个“张量”。

证明. 显然, $R(X, Y)Z$ 是 X, Y 和 Z 的三线性函数。如果 X 替换成一个倍数 fX , 则 $-X \vdash (Y \vdash Z)$, $Y \vdash (X \vdash Z)$, $[X, Y] \vdash Z$ 这三项就分别替换成

³Nomizu 给 R 加上了一个负号。我们规定的记号有一个优点, 就是在 (Riemann 情况下) 内积 $\langle R(\partial_h, \partial_i)\partial_j, \partial_k \rangle$ 与经典记号 R_{hijk} 一致。

- (i) $-fX \vdash (T \vdash Z)$,
- (ii) $(Yf)(X \vdash Z) + fY \vdash (X \vdash Z)$,
- (iii) $-(Yf)(X \vdash Z) + f[X, Y] \vdash Z$.

把这三项加起来, 我们得到恒等式

$$R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z.$$

对于 Y 和 Z 对应的恒等式可以容易得通过类似的计算得出。

现在假设 $X = \sum x^i \partial_i$, $Y = \sum y^j \partial_j$ 和 $Z = \sum z^k \partial_k$ 。则

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \sum R(x^i \partial_i, y^j \partial_j)(z^k \partial_k) \\ &= \sum x^i y^j z^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k. \end{aligned}$$

在 p 处计算这个表达式, 我们得到公式

$$(R(X, Y)Z)_p = \sum x^i(p) y^j(p) z^k(p) (R(\partial_i, \partial_j) \partial_k)_p,$$

它只依赖于函数 x^i , y^j , z^k 在 p 处的值, 而不依赖于这些函数在邻近点的值, 证毕。□

现在考虑参数曲面

$$s: \mathbb{R}^2 \rightarrow M.$$

给定沿 s 的任意向量场 V 。我们可以对 V 应用两个协变微分算子 $\frac{D}{\partial x}$ 和 $\frac{D}{\partial y}$ 。一般来说, 这些算子互相不是可交换的。

引理 9.2. $\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} V - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} V = R\left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}\right) V$.

证明. 用局部坐标系表示上式两端, 加以计算, 同时利用恒等式

$$\partial_j \vdash (\partial_i \vdash \partial_k) - \partial_i \vdash (\partial_j \vdash \partial_k) = R(\partial_i, \partial_j) \partial_k$$

即可。□

[一个有意思的问题是: 能否构造一个沿 s 的向量场 P , 它是平行向量场, 即

$$\frac{D}{\partial x} P = \frac{DP}{\partial y} = 0,$$

并且在原点处取已知值 $P_{(0,0)}$ 。一般来说, 这样的向量场并不存在。然而, 如果曲率张量恰好为零, 则 P 可构造如下: 令 $P_{(x_0,0)}$ 是沿 x 轴的平行向量场, 满足给定的初始条件。对于每个固定的 x_0 , 令 $P_{(x_0,y)}$ 是沿曲线

$$y \mapsto s(x_0, y),$$

的一个平行向量场, 在 $y = 0$ 时取正确的值。这就沿 s 处处定义了 P 。显然, $\frac{D}{\partial y} P$ 恒为零, 而 $\frac{D}{\partial x} P$ 沿 x 轴为零。现在, 恒等式

$$\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} P - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} P = R\left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}\right) P = 0$$

意味着 $\frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial x} P = 0$ 。另一方面, 向量场 $\frac{D}{\partial x} P$ 是沿曲线

$$y \mapsto s(x_0, y)$$

的平行向量场。由于 $\left(\frac{D}{\partial x} P\right)_{(x_0,0)} = 0$, 所以 $\frac{D}{\partial x} P$ 恒为零, 这就证明了 P 是沿 s 的平行向量场。]

今后我们假设: M 是一个 Riemann 流形, 配备了唯一与度规相容的对称联络。综上所述, 我们将证明张量 R 满足四条对称关系。

引理 9.3. 一个 Riemann 流形的曲率张量满足:

- (1) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0,$
- (2) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$
- (3) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0,$
- (4) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Z, W)X, Y \rangle = 0.$

证明. 反对称关系 (1) 直接从 R 的定义得出。

因为 (2) 的所有三项都是张量, 所以当括号积 $[X, Y]$, $[X, Z]$ 和 $[Y, Z]$ 都是零时足够证明 (2)。在这个假设下, 我们必须验证恒等式

$$\begin{aligned} & -X \vdash (Y \vdash Z) + Y \vdash (X \vdash Z) \\ & -Y \vdash (Z \vdash X) + Z \vdash (Y \vdash X) \\ & -Z \vdash (X \vdash Y) + X \vdash (Z \vdash Y) = 0 \end{aligned}$$

但是联络的对称性意味着

$$Y \vdash Z - Z \vdash Y = [Y, Z] = 0.$$

因此, 左上项抵消了右下项。类似地, 其余各项也两两抵消, 这就证明了 (2)。

要证明 (3), 我们必须说明表达式 $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ 关于 Z 和 W 成反对称。这显然等价于下面的断言: 对于所有 X, Y, Z 有

$$\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0.$$

我们仍然假设 $[X, Y] = 0$, 所以

$$\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = \langle -X \vdash (Y \vdash Z) + Y \vdash (X \vdash Z), Z \rangle.$$

换言之, 我们必须证明表达式

$$\langle Y \vdash (X \vdash Z), Z \rangle$$

关于 X 和 Y 对称。

因为 $[X, Y] = 0$, 所以表达式 $YX \langle Z, Z \rangle$ 关于 X 和 Y 对称。因为联络与度规相容, 我们有

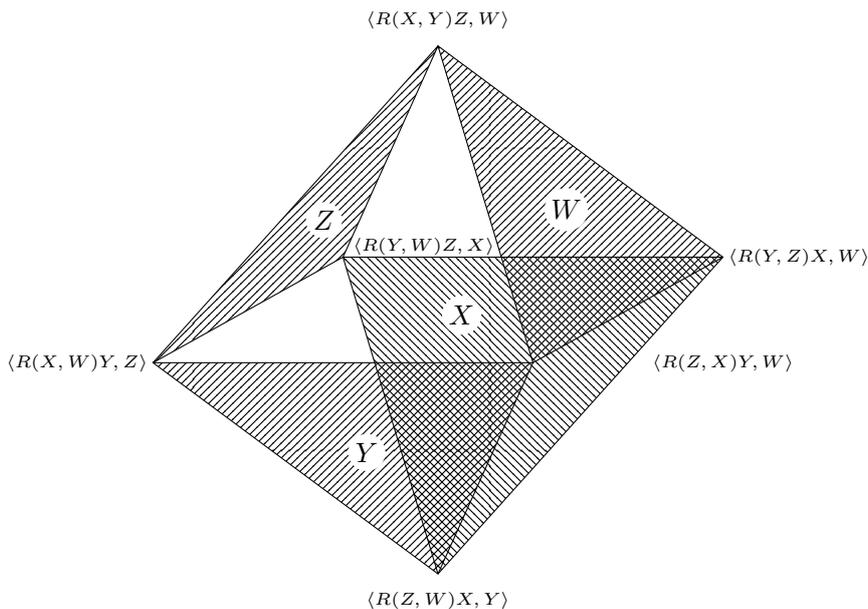
$$X \langle Z, Z \rangle = 2 \langle X \vdash Z, Z \rangle$$

因此

$$YX \langle Z, Z \rangle = 2 \langle Y \vdash (X \vdash Z), Z \rangle + 2 \langle X \vdash Z, Y \vdash Z \rangle.$$

但右端最后一项显然关于 X 和 Y 对称, 所以 $\langle Y \vdash (X \vdash Z), Z \rangle$ 关于 X 和 Y 对称, 这就证明了 (3)。

性质 (4) 可以从 (1), (2) 和 (3) 证明如下:



公式 (2) 断言: 在阴影三角形 W 的诸顶点处各量之和为零。类似地 (利用 (1) 和 (3)), 其余每个阴影三角形诸顶点处各量之和也是零。把对应于上方两个阴影三角形的恒等式加起来, 再减去对应于下方两个三角形的恒等式, 可见最上顶点处的量的二倍减去最下顶点处的量的二倍为零。这就证明了 (4), 证毕。 \square

§ 10. 测地线与完备性

令 M 是一个连通 Riemann 流形。

定义. 令 I 表示任意实数区间, 参数路径

$$\gamma: I \rightarrow M$$

称为一条**测地线 (geodesic)**, 如果加速度向量场 $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}$ 恒为零。因此, 速度向量场 $\frac{d\gamma}{dt}$ 必为沿 γ 的平行向量场。如果 γ 是测地线, 则恒等式

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

说明速度向量的长度 $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}}$ 沿 γ 是常数。引入**弧长 (arc-length)** 函数

$$s(t) = \int \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt + \text{常数}.$$

上面的表述可以转述如下: 参数 t 沿着一条测地线是弧长的线性函数。参数 t 实际上是弧长当且仅当 $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = 1$ 。

利用坐标为 u^1, \dots, u^n 的局部坐标系, 曲线 $t \mapsto \gamma(t) \in M$ 确定 n 个光滑函数 $u^1(t), \dots, u^n(t)$ 。于是, 测地线方程 $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ 具有形式

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(u^1, \dots, u^n) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

因此, 测地线的存在性要由二阶微分方程的一个确定系统的解而定。

更一般地考虑任意形如

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt}\right)$$

的方程组, 其中 \vec{u} 表示 (u^1, \dots, u^n) , \vec{F} 表示 C^∞ 函数组成的 n 元组, 在点

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1) \in \mathbb{R}^{2n}$$

的某个邻域 U 内处处有定义。

定理 10.1. [存在性和唯一性] 存在点 (\vec{u}_1, \vec{v}_1) 的一个邻域 W 和一个数 $\varepsilon > 0$, 使得对每个 $(\vec{u}_0, \vec{v}_0) \in W$, 微分方程

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt}\right)$$

有唯一解 $t \rightarrow \vec{u}(t)$, 对 $|t| < \varepsilon$ 有定义, 并满足原始条件

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad \frac{d\vec{u}}{dt}(0) = \vec{v}_0.$$

此外, 这个解还光滑地依赖于原始条件。换言之, 从 $W \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 到 \mathbb{R}^n 的对应关系

$$(\vec{u}_0, \vec{v}_0, t) \mapsto \vec{u}(t)$$

是所有 $2n + 1$ 个变量的一个 C^∞ 函数。

证明. 引入新变量 $v^i = \frac{du^i}{dt}$, 这一组 n 个二阶微分方程变成一组 $2n$ 个一阶微分方程

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{v}, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{u}, \vec{v}). \end{cases}$$

该结论则由 ([12], 第 166 页) 得出。(与引理 2.4 对比)。 □

应用这个定理到测地线微分方程, 我们得到下面的引理。

引理 10.2. 对于 Riemann 流形 M 上的每个点 p_0 , 存在 p_0 的一个邻域 U 和一个数 $\varepsilon > 0$, 使得对于每个 $p \in U$ 和每个长度 $< \varepsilon$ 的切向量 $v \in TM_p$, 存在唯一一条测地线

$$\gamma_v : (-2, 2) \rightarrow M,$$

满足条件

$$\gamma_v(0) = p, \quad \frac{d\gamma_v}{dt}(0) = v.$$

证明. 如果我们想要用一个任意小的区间来代替区间 $(-2, 2)$, 则这个表述将立刻从 10.1 得到。更准确地说, 存在 p_0 的邻域 U 和数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, 使得对于每个 $p \in U$ 和每个 $v \in TM_p$ 满足 $\|v\| < \varepsilon_1$, 存在唯一的测地线

$$\Gamma_v : (-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2) \rightarrow M,$$

满足所要的初始条件。

为了得到更强的表述, 只需要观察测地线的微分方程有下面的齐次性质。令 c 是任意常数。如果参数曲线

$$t \mapsto \gamma(t)$$

是一个测地线，则参数曲线

$$t \mapsto \gamma(ct)$$

将也是一个测地线。

现在假设 ε 小于 $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ 。则如果 $\|v\| < \varepsilon$ 且 $|t| < 2$ ，注意到

$$\left\| \frac{v}{\varepsilon_2} \right\| < \varepsilon_1 \quad \text{且} \quad |\varepsilon_2 t| < 2\varepsilon_2.$$

因此，我们可以把 $\gamma_v(t)$ 定义为 $\gamma_{v/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t)$ 。这就证明了引理 10.2。 \square

使用下面的记号将会很方便。令 $v \in TM_q$ 是一个切向量，并且假设存在一个测地线

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow M$$

满足条件

$$\gamma(0) = q, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = v.$$

则点 $\gamma(1) \in M$ 将记为 $\exp_q(v)$ ，称为切向量 v 的**指数对应点 (exponential)**⁴。因此，测地线 γ 可以用下面的公式来描述：

$$\gamma(t) = \exp_q(tv).$$

引理 10.2 指出只要 $\|v\|$ 足够小， $\exp_q(v)$ 就有定义。一般来说， $\exp_q(v)$ 对于大向量 v 没有定义。然而， $\exp_q(v)$ 如果有定义，它总是唯一确定的。

定义. 流形 M 称为**测地完备的 (geodesically complete)**，如果 $\exp_q(v)$ 对所有 $q \in M$ 和所有向量 $v \in TM_q$ 有定义，这显然等价于下面的要求：

对于任意测地线段 $\gamma_0: [a, b] \rightarrow M$ ，可以把 γ_0 延长为一条测地线

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M.$$

在证明了一些局部性结果之后，我们再回来研究完备性。

令 TM 是 M 的切流形，由所有形如 (p, v) 的配对组成，其中 $p \in M$ ， $v \in TM_p$ 。我们赋予 TM 下面的 C^∞ 微分结构：如果 (u^1, \dots, u^n) 是开集 $U \subset M$ 中的坐标系，则在 $q \in U$ 处的每个切向量均可唯一表示为 $t^1 \partial_1 + \dots + t^n \partial_n$ ，其中 $\partial_i = \left. \frac{\partial}{\partial u^i} \right|_q$ 。则函数 $u^1, \dots, u^n, t^1, \dots, t^n$ 构成开集 $TU \subset TM$ 上的一个坐标系。

引理 10.2 说：对于每个 $p \in M$ ，映射

$$(q, v) \mapsto \exp_q(v)$$

在点 $(p, 0) \in TM$ 的一个邻域 V 中处处有定义。此外，这个映射在整个 V 中是可微的。

现在考虑光滑函数 $F: V \rightarrow M \times M$ ，定义为 $F(q, v) = (q, \exp_q(v))$ 。我们声称 F 在点 $(p, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵是非奇异的。事实上，积 $U \times U \subset M \times M$ 上的诱导坐标为 $(u_1^1, \dots, u_1^n, u_2^1, \dots, u_2^n)$ ，

⁴这一术语的历史动机如下。如果 M 是所有 $n \times n$ 么正矩阵的群，则在单位矩阵处的切空间 TM_I 可以等同于 $n \times n$ 反 Hermite 矩阵。上面定义的函数

$$\exp_I: TM_I \rightarrow M$$

就由指数幂级数给出：

$$\exp_I(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

我们有

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial}{\partial u_1^i} + \frac{\partial}{\partial u_2^i},$$

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial t^j} \right) = \frac{\partial}{\partial u_2^j}.$$

因此 F 在 $(p, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵具有形状 $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$, 并且因此是非奇异的。

从隐函数定理可得 F 把 $(p, 0) \in TM$ 的某个邻域 V' 微分同胚地映射成 $(p, p) \in M \times M$ 的某个领域。我们可以假设第一个邻域 V' 是所有配对 (q, v) 组成使得 q 属于 p 的一个给定邻域 U' 并且使得 $\|v\| < \varepsilon$ 。选择 p 的一个较小的邻域 W , 使得 $F(V') \supset W \times W$ 。则我们证明了下面的引理。

引理 10.3. 对于每个 $p \in M$, 存在一个邻域 W 和一个数 $\varepsilon > 0$, 使得

- (1) W 的任意两点均可用 M 中唯一一条长度 $< \varepsilon$ 的测地线连接起来。
- (2) 这条测地线光滑依赖于这两个点 (即: 如果 $t \rightarrow \exp_{q_1}(tv)$, $0 \leq t \leq 1$, 是连接 q_1 和 q_2 的测地线, 则配对 $(q_1, v) \in TM$ 微分依赖于 (q_1, q_2))。
- (3) 对于每个 $q \in W$, 映射 \exp_q 将 TM_q 中的开 ε -球微分同胚地映射成一个开集 $U_q \supset W$ 。

注. 若更谨慎地选择 W , 则可使连接其任意两点的测地线完全位于 W 内部, 参见 [29]。

现在让我们研究测地线与弧长之间的关系。

定理 10.4. 令 W 和 ε 如引理 10.3 所述, 令

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow M$$

是连接 W 两点长度 $< \varepsilon$ 的测地线, 并且令

$$\omega: [0, 1] \rightarrow M$$

是连接同样两点的任意其它的逐段光滑曲线。则

$$\int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt \leq \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt,$$

其中, 等号仅在点集 $\omega([0, 1])$ 与 $\gamma([0, 1])$ 重合时才能成立。

因此, γ 是连接其端点的最短路径。

证明基于两个引理。令 $q = \gamma(0)$ 并且令 U_q 如引理 10.3 中所述。

引理 10.5. 在 U_q 中, 通过 q 的测地线都是超曲面

$$\{\exp_q(v) : v \in TM_q, \|v\| = \text{常数}\}$$

的正交轨迹。

证明. 令 $t \mapsto v(t)$ 表示 TM_q 中任意一条曲线, 使得 $\|v(t)\| = 1$ 。我们必须证明: 在 U_q 中, 对应曲线

$$t \mapsto \exp_q(r_0 v(t))$$

其中 $0 < r_0 < \varepsilon$, 正交于径向测地线

$$t \mapsto \exp_q(rv(t_0)).$$

用参数曲面 f 给出

$$f(r, t) = \exp_q(rv(t)), \quad 0 \leq r < \varepsilon$$

我们必须证明: 对于所有的 (r, t) 有

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

现在

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle,$$

其中, 等号右端第一项为零, 因为曲线

$$r \mapsto f(r, t)$$

是测地线。第二项等于

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 0$$

因为 $\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = \|v(t)\| = 1$ 。因此, 量 $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ 独立于 r 。但对于 $r = 0$, 我们有

$$f(0, t) = \exp_q(0) = q,$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0$ 。因此 $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ 恒为零, 证毕。 \square

现在考虑任意逐段光滑曲线

$$\omega : [a, b] \rightarrow U_q - \{q\}.$$

每个点 $\omega(t)$ 均可唯一表示为形式 $\exp_q(r(t)v(t))$, 其中 $0 < r(t) < \varepsilon$ 和 $\|v(t)\| = 1, v(t) \in TM_q$ 。

引理 10.6. 长度 $\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \geq |r(b) - r(a)|$, 其中等号只在函数 $r(t)$ 单调且函数 $v(t)$ 为常数时才成立。

因此, 连接围绕 q 点的两个同心球壳的最短路径是一条径向测地线。

证明. 令 $f(r, t) = \exp_q(rv(t))$, 使得 $\omega(t) = f(r(t), t)$ 。则

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

因为右端两个向量相互正交, 并且因为 $\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = 1$, 这给出了

$$\left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 = |r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 \geq |r'(t)|^2$$

其中, 仅当 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ 时等号才成立, 因而仅当 $\frac{dv}{dt} = 0$ 时才成立。因此

$$\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \geq \int_a^b |r'(t)| dt \geq |r(b) - r(a)|$$

其中仅当 $r(t)$ 单调且 $v(t)$ 为常数时等号成立, 证毕。 \square

定理 10.4 的证明现在就很直接了。考虑任意逐段光滑路径 ω , 从 q 到一点

$$q' = \exp_q(rv) \in U_q,$$

其中, $0 < r < \varepsilon$, $\|v\| = 1$ 。则对于任意 $\delta > 0$, 路径 ω 必须包括一个线段, 把半径为 δ 的球壳连接到半径为 r 的球壳, 并位于这两个球壳之间。这个线段的长度将 $\geq r - \delta$, 因此令 δ 趋于 0 时, ω 的长度将 $\geq r$ 。若 $\omega([0, 1])$ 与 $r([0, 1])$ 不重合, 则我们将很容易地得到一个严格的不等式。这完成了定理 10.4 的证明。

定理 10.4 的一个重要结果如下:

推论 10.7. 假设路径 $\omega: [0, \ell] \rightarrow M$ 以弧长为参数, 其长度小于或等于从 $\omega(0)$ 到 $\omega(\ell)$ 的任意其它路径的长度, 那么 ω 是一条测地线。

证明. 如前, 考虑 ω 的任意一段, 它位于开集 W 中, 并且有长度 $< \varepsilon$ 。这一段必定是测度线, 因而整个路径 ω 是测地线。□

定义. 测地线 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ 称为**极小 (minimal)**, 如果其长度小于或等于连接其端点的任意其它逐段光滑路径的长度。

定理 10.4 断言: 测地线的任意足够小的一段都是极小测地线。另一方面, 长的测地线可能不是极小测地线。例如, 我们不久将会看到, 单位球面上的大圆弧是测地线。如果这样一条弧的长度大于 π , 它肯定不是极小测地线。

一般来说, 极小测地线不是唯一的。例如, 单位球面上的两个对径点可以用无限多条极小测地线连接起来。然而, 下面的断言为真。

两点 $p, q \in M$ 的距离 $\rho(p, q)$ 定义为连接这两点的所有逐段光滑路径的弧长的下确界。这显然使 M 称为一个度量空间。从定理 10.4 容易得到这个度规与 M 的通常拓扑是相容的。

推论 10.8. 给定一个紧致集 $K \subset M$, 存在数 $\delta > 0$, 使得 K 的任意两个点之间的距离小于 δ , 就可以用唯一一条长度 $< \delta$ 的测地线连接起来。此外, 这条测地线是极小的, 并且光滑依赖于它的端点。

证明. 如引理 10.3 中, 用开集 W_α 覆盖 K , 并令 δ 足够小使得 K 中任意两个点距离小于 δ , 这两个点就位于同一个 W_α , 证毕。□

回忆流形 M 是**测地完备 (geodesically complete)** 的, 如果每个测地线段可以被无限延长。

定理 10.9 (Hopf 和 Rinow⁵). 如果 M 是测地完备的, 则任意两点可以用一条极小测地线连接起来。

证明. 给定 $p, q \in M$ 及它们之间的距离 $r > 0$, 如引理 10.3 中选择邻域 U_p 。令 $S \subset U_p$ 表示以 p 为圆心, 以 $\delta < \varepsilon$ 为半径的球壳。因为 S 是紧致的, 所以 S 上存在一个点

$$p_0 = \exp_p(\delta v), \quad \|v\| = 1,$$

使得到 q 的距离是极小的。我们将证明

$$\exp_p(rv) = q.$$

这意味着测地线段 $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leq t \leq r$, 实际上是一条从 p 到 q 的极小测地线。

⁵见 [30] 的第 341 页以及 [31]。

证明的关键在于说明沿测地线 γ 运动的点必然越来越接近点 q 。实际上对于每个 $t \in [\delta, r]$, 我们将证明

$$\rho(\gamma(t), q) = r - t. \quad (1_t)$$

这个恒等式在 $t = r$ 时将完成证明。

首先, 我们将说明等式 (1_t) 为真。因为每条从 p 到 q 的路径必须通过 S , 我们有

$$\rho(p, q) = \min_{s \in S} (\rho(p, s) + \rho(s, q)) = \delta + \rho(p_0, q).$$

因此, $\rho(p_0, q) = r - \delta$ 。由于 $p_0 = \gamma(\delta)$, 这就证明了 (1_δ) 。

令 $t_0 \in [\delta, r]$ 表示使得 (1_t) 为真的数 t 的上确界。则通过连续性, 等式 (1_{t_0}) 也为真。如果 $t_0 < r$, 我们将得到一个矛盾。令 S' 表示以点 $\gamma(t_0)$ 为圆心, 以 δ' 为半径的一个小球壳, 并且令 $p'_0 \in S'$ 是 S' 中与 q 相距为极小的一点。(见图 10.1)。

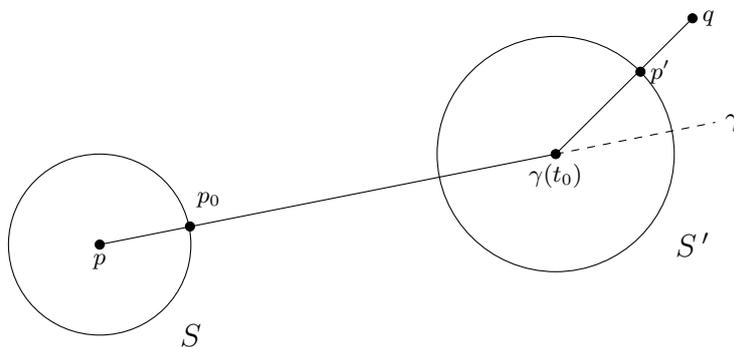


图 10.1

则

$$\rho(\gamma(t_0), q) = \min_{s \in S'} (\rho(\gamma(t_0), s) + \rho(s, q)) = \delta' + \rho(p'_0, q),$$

因此

$$\rho(p'_0, q) = (r - t_0) - \delta'. \quad (2)$$

我们声明 p_0 等于 $\gamma(t_0 + \delta')$ 。实际上, 三角不等式表述为

$$\rho(p, p'_0) \geq \rho(p, q) - \rho(p'_0, q) = t_0 + \delta'$$

(利用了 (2))。但是, 一条从点 p 到 p'_0 的长度恰好为 $t_0 + \delta'$ 的路径可以通过沿着 γ 从 p 到 $\gamma(t_0)$, 再沿着极小测地线从 $\gamma(t_0)$ 到 p'_0 获得。由于这条分段的测地线有极小长度, 从推论 10.7 得到它是一条 (没有分段的) 测地线, 并且因此与 γ 重合。

因此 $\gamma(t_0 + \delta') = p'_0$ 。现在等式 (2) 变成了

$$\rho(\gamma(t_0 + \delta'), q) = r - (t_0 + \delta'). \quad (1_{t_0 + \delta'})$$

这和 t_0 的定义矛盾, 证毕。 \square

我们得到下面的结果:

推论 10.10. 如果 M 是测地完备的, 则 M 的每个有界子集都具有紧致闭包。因此, M 作为度量空间是完备的 (即是每个 Cauchy 序列都收敛)。

证明. 如果 $X \subset M$ 具有直径 d , 则对任意 $p \in M$, 映射 $\exp_p : TM_p \rightarrow M$ 把 TM_p 中半径为 d 的圆盘映射成 M 的一个紧致子集, 运用定理 10.9, 这个子集含有 X 。因此, X 的闭包是紧致的。 \square

反之, 如果 M 作为度量空间是完备的, 则不难用引理 10.3 证明: M 是测地完备的。至于细节, 读者可以参考 Hopf 和 Rinow 的文章。今后, 我们将不区分测地完备和度规完备, 而将简单地称一个完备 Riemann 流形 (complete Riemannian manifold)。

测地线的熟悉例子. 在 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 中, 对于通常坐标系 x_1, \dots, x_n 和通常 Riemann 度规 $dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n$, 我们有 $\Gamma_{ij}^k = 0$ 和对于一条测地线 γ 的方程, 由 $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ 给出, 成为

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0,$$

这个方程组的解是直线。这也可以从下述论证看出: 容易说明弧长公式

$$\int \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

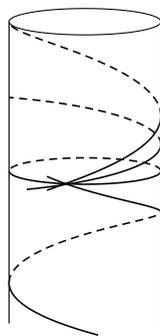
与通常把弧长定义为内接多边形长度的上确界是一致的。从这个定义显然可见直线具有极小长度, 并且因此是测地线。

\mathbb{S}^n 上的测地线正好是大圆, 即 \mathbb{S}^n 与通过其中心的平面相交而得的圆。

证明. 通过平面 E^2 的反射是一个等距同构 $I: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, 其不动点集是 $C = \mathbb{S}^n \cap E^2$ 。令 x 和 y 是 C 的两个点, 其间存在唯一一条测地线 C' 具有极小长度。则由于 I 是等距同构, 曲线 $I(C')$ 是与 C' 一样的长度的 $I(x) = x$ 和 $I(y) = y$ 之间的一条测地线。因此, $C' = I(C')$, 从而 $C' \subset C$ 。

最后, 由于存在一个通过 \mathbb{S}^n 的任意点在任意已知方向上的大圆, 所以这些大圆全都是测地线。□

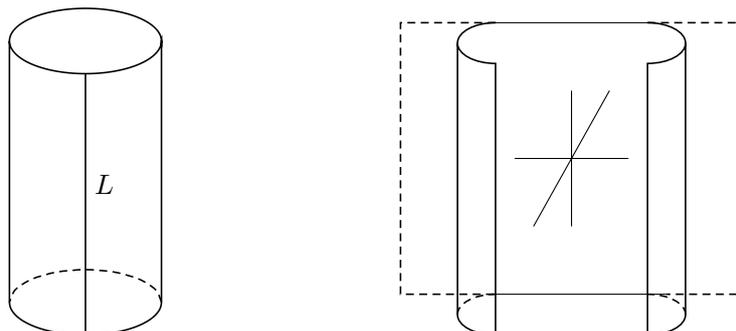
球面上两个对径点之间有具有极小长度的测地线的连续统。所有其它点对之间都存在一条长度极小的唯一测地线, 但存在无限多个非极小测地线, 依赖于测地线绕球面转多少次及沿哪个方向出发而定。



通过相同的原因, 旋转曲面上每条经线都是测地线。

直圆柱面 Z 上的测地线是母线、与母线垂直的平面所截的圆, 以及 Z 上的螺旋线。

证明. 如果 L 是 Z 的一条母线, 通过把 Z 展开成 \mathbb{R}^2 , 我们得到一个等距同构 $I: Z - L \rightarrow \mathbb{R}^2$:



Z 上测地线正好就是 \mathbb{R}^2 中的直线在 I^{-1} 下的像。 Z 上两点之间有无限多条测地线。□

第三章 对变分学的应用：测地线

§ 11. 光滑流形的路径空间

令 M 是一个光滑流形且 p 和 q 是 M 的两点 (不必相异)。从 p 到 q 的**逐段光滑路径** (piecewise smooth path) 是指一个映射 $\omega : [0, 1] \rightarrow M$ 使得

- (1) 存在 $[0, 1]$ 的一个细分 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ 使得每个 $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 是 C^∞ 可微的;
- (2) $\omega(0) = p$ 和 $\omega(1) = q$ 。

M 中从 p 到 q 的所有逐段光滑路径的集合将被记为 $\Omega(M; p, q)$, 或者简记为 $\Omega(M)$ 或 Ω 。

稍后 (§16中) Ω 将被赋予拓扑空间的结构, 但目前这将是不是必要的。我们将 Ω 考虑为“无穷维流形”之类的东西。为了进行这种类比, 我们作下面的定义。

在路径 ω 处 Ω 的**切空间** (tangent space) 是指一个向量空间, 由沿 ω 的所有逐段光滑向量场 W 组成, 使得 $W(0) = 0$ 和 $W(1) = 0$ 。记号 $T\Omega_\omega$ 用来表示这个向量空间。

如果 F 是 Ω 上一个实值函数, 我们自然会问切空间上的导出映射

$$F_* : T\Omega_\omega \rightarrow T\mathbb{R}_{F(\omega)},$$

应该是什么意思? 当 F 是光滑流形 M 上通常意义下的光滑函数时, 我们可以定义 $F_* : TM_p \rightarrow T\mathbb{R}_{F(p)}$ 如下: 给定 $X \in TM_p$, 选择 M 中的一条光滑路径 $u \mapsto \alpha(u)$, 在 $-\varepsilon < u < \varepsilon$ 时有定义, 使得

$$\alpha(0) = p, \quad \frac{d\alpha}{du}(0) = X.$$

则 $F_*(X)$ 等于 $\left. \frac{dF(\alpha(u))}{du} \right|_{u=0}$ 乘以基向量 $\left(\frac{d}{dt} \right)_{F(p)} \in T\mathbb{R}_{F(p)}$ 。

为了对映射 $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 进行类似构造, 需要引入下面的概念。

定义 11.1. (端点保持固定条件下) ω 的一个**变分** (variation) 是一个函数

$$\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega,$$

对于一些 $\varepsilon > 0$, 使得

- (1) $\bar{\alpha}(0) = \omega$;
- (2) 存在 $[0, 1]$ 的细分 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ 使得由 $\alpha(u, t) = \bar{\alpha}(u)(t)$ 定义的映射

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$$

在每个带状区域 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$, ($i = 1, \dots, k$) 上都是 C^∞ 映射;

因为每个 $\bar{\alpha}(u)$ 属于 $\Omega = \Omega(M; p, q)$, 注意到

(3) 对于所有 $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 有 $\alpha(u, 0) = p$ 和 $\alpha(u, 1) = q$ 。

我们将用 α 或用 $\bar{\alpha}$ 来表示这个变分。更一般地, 如果在上面的定义中, $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 换成 \mathbb{R}^n 中 0 的一个邻域 U , 则 α (或 $\bar{\alpha}$) 被称为 ω 的一个 n 参数变分 (n -parameter variation)。

现在 $\bar{\alpha}$ 可以考虑为 Ω 的“光滑路径”。它的“速度向量” $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0) \in T\Omega_\omega$ 定义为沿 ω 的向量场 W , 由下式给出。

$$W_t = \frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)_t = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t).$$

显然, $W \in T\Omega_\omega$ 。这个向量场 W 也被称为与变分 α 相关的变分向量场 (variation vector field)。

给定任意 $W \in T\Omega_\omega$, 注意到存在变分 $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ 满足条件 $\bar{\alpha}(0) = \omega$, $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0) = W$ 。实际上, 我们可以设定

$$\bar{\alpha}(t) = \exp_{\omega(t)}(uW_t).$$

通过与上面给定的定义类比, 如果 F 是 Ω 上的一个实值函数, 我们尝试定义

$$F_*: T\Omega_\omega \rightarrow T\mathbb{R}_{F(\omega)},$$

如下: 给定 $W \in T\Omega_\omega$, 选取变分 $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ 使得

$$\bar{\alpha}(0) = \omega, \quad \frac{d\bar{\alpha}}{du}(0) = W;$$

并且设定 $F_*(W)$ 等于 $\left. \frac{dF(\bar{\alpha}(u))}{du} \right|_{u=0}$ 乘以切向量 $\left(\frac{d}{dt} \right)_{F(\omega)}$ 。当然, 如果对 F 不做任意假设, 就不能保证这个导数存在以及独立于 $\bar{\alpha}$ 的选择。我们不会探究 F 必须满足哪些条件才能使 F_* 具有这些性质。我们之所以说明如何定义 F_* , 只是为了引出下面的定义。

定义. 一个路径 ω 是函数 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 的一个**临界路径 (critical path)** 当且仅当 $\left. \frac{dF(\bar{\alpha}(u))}{du} \right|_{u=0}$ 对于 ω 的每个变分 $\bar{\alpha}$ 都是零。

例. 如果 F 在路径 ω_0 处取其极小值, 并且如果导数 $\frac{dF(\bar{\alpha}(u))}{du}$ 是均有定义的, 则 ω_0 显然是一条临界路径。

§ 12. 路径的能量

现在假设 M 是一个 Riemann 流形。向量 $v \in TM_p$ 的长度将被记为 $\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ 。对于 $\omega \in \Omega$, 定义 ω 从 a 到 b ($0 \leq a < b \leq 1$) 的**能量 (energy)** 为

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt.$$

我们将简写 E_0^1 为 E 。

这可与从 a 到 b 的弧长

$$L_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt$$

进行比较如下。对 $f(t) = 1$ 和 $g(t) = \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|$, 应用 Schwarz 不等式

$$\left(\int_a^b fg dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 dt \right) \left(\int_a^b g^2 dt \right)$$

我们看到

$$(L_a^b)^2 \leq (b-a)E_a^b,$$

其中当且仅当 g 是常数时等号成立，即当且仅当参数 t 与弧长成正比。

现在假设存在一个从 $p = \omega(0)$ 到 $q = \omega(1)$ 的极小测地线 γ 。则

$$E(\gamma) = L(\gamma)^2 \leq L(\omega)^2 \leq E(\omega).$$

这里等式 $L(\gamma)^2 = L(\omega)^2$ 能成立仅当 ω 也是一个极小测地线，可能需要重新参数化（与推论 10.7 比较）。另一方面，等式 $L(\omega)^2 = E(\omega)$ 能成立仅当参数与沿 ω 的弧长成正比。这证明了：除非 ω 也是一条极小测地线，否则我们有 $E(\gamma) < E(\omega)$ 。换言之：

引理 12.1. 令 M 是一个完备 Riemann 流形，并且令 $p, q \in M$ 之间的距离为 d 。则能量函数

$$E : \Omega(M; p, q) \rightarrow \mathbb{R}$$

恰好在从 p 到 q 的极小测地线的集合上取其极小值 d^2 。

我们现在将看到什么路径 $\omega \in \Omega$ 是能量函数 E 的临界路径。

令 $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ 是 ω 的一个变分，并且令 $W_t = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ 是相应的变分向量场。此外，令：

$$V_t = \frac{d\omega}{dt} = \omega \text{ 的速度向量,}$$

$$A_t = \frac{D}{dt} \frac{d\omega}{dt} = \omega \text{ 的加速度向量,}$$

$$\Delta_t V = V_{t^+} - V_{t^-} = \text{速度向量在 } t \text{ 处的不连续性, 其中 } 0 < t < 1.$$

当然对于一切 t ，除了有限多个值外，有 $\Delta_t V = 0$ 。

定理 12.2 (第一变分公式). 导数

$$\left. \frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} \right|_{u=0} = - \sum_t \langle W_t, \Delta_t V \rangle - \int_0^1 \langle W_t, A_t \rangle dt.$$

证明. 根据引理 8.3，我们有

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle.$$

因此，

$$\frac{dE(\bar{\alpha})}{du} = \frac{d}{du} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt = 2 \int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt.$$

通过引理 8.7，我们在最后一个公式中可以用 $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ 代替 $\frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u}$ 。

选择 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ ，使得 α 在每个带状区域 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$ 上是可微的。则我们可以在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上“分部积分”如下：恒等式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle$$

意味着

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_{i-1}^+}^{t=t_i^-} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt.$$

把 $i = 1, \dots, k$ 对应的公式加起来并运用 $t = 0$ 或 1 时 $\frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0$ 的事实，这给出

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} = - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle.$$

设定 $u = 0$ ，现在我们就得到所要的公式

$$\frac{1}{2} \frac{dE \circ \bar{\alpha}}{du}(0) = - \sum_{i=1}^{k-1} \langle W_{t_i}, \Delta_{t_i} V \rangle - \int_0^1 \langle W, A \rangle dt.$$

证毕。 □

直观上， $\frac{dE \circ \bar{\alpha}}{du}(0)$ 的表达式中第一项说明当路径 ω 沿着“折弯”程度递减方向变化时，倾向于减小能量 E ，见图 12.1。

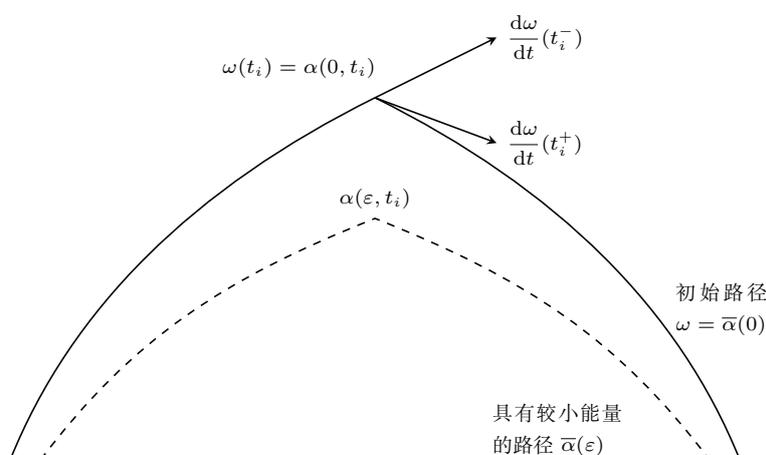


图 12.1

第二项说明当曲线沿其加速度向量 $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)$ 方向变化时，倾向于减小能量 E 。

回忆一下，路径 $\omega \in \Omega$ 被称为**测地线 (geodesic)** 当且仅当 ω 在整个 $[0, 1]$ 区间是 C^∞ 的并且 ω 的加速度向量 $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)$ 沿着 ω 恒为零。

推论 12.3. 路径 ω 是函数 E 的临界点当且仅当 ω 是一条测地线。

证明. 一条测地线显然是一个临界点。令 ω 是一个临界点。存在 ω 的一个变分，其变分向量场是 $W(t) = f(t)A(t)$ ，其中 $f(t)$ 除了在 t_i 处为零外处处为正。则

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{du}(0) = - \int_0^1 f(t) \langle A(t), A(t) \rangle dt.$$

这个表达式为零当且仅当对于所有 t 有 $A(t) = 0$ 。因此，每个 $\omega \Big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ 是一条测地线。

现在选择一个变分，使得 $W(t_i) = \Delta_{t_i} V$ 。则 $\frac{1}{2} \frac{dE}{du}(0) = - \sum \langle \Delta_{t_i} V, \Delta_{t_i} V \rangle$ 。如果这个表达式为零，则 $\Delta_{t_i} V$ 处处为零，而 ω 是 C^1 类可微的，甚至点在 t_i 处也一样。现在，从微分方程的唯一性定理得到 ω 处处是 C^∞ 可微的：因此 ω 是一条不折测地线。 □

§ 13. 能量函数在临界路径处的 Hesse 泛函

继续进行上一节推演的那种类比，我们现在希望定义一个双线性泛函

$$E_{**} : T\Omega_\gamma \times T\Omega_\gamma \rightarrow \mathbb{R},$$

这里 γ 是函数 E 的临界点，即是一条测地线。这个双线性泛函称为 E 在 γ 处的 **Hesse 泛函 (Hesse functional)**。

如果 f 是流形 M 上的实值函数，具有临界点 p ，则 Hesse 泛函

$$f_{**} : TM_p \times TM_p \rightarrow \mathbb{R}$$

可以定义如下：给定 $X_1, X_2 \in TM_p$ ，选择一个光滑映射 $(u_1, u_2) \mapsto \alpha(u_1, u_2)$ ，定义在 \mathbb{R}^2 中原点 $(0, 0)$ 的某个邻域上，而在 M 中取值，使得

$$\alpha(0, 0) = p, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0) = X_1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0) = X_2.$$

则

$$f_{**}(X_1, X_2) = \left. \frac{\partial^2 f(\alpha(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{(0,0)}.$$

由此得到定义 E_{**} 如下。对于向量场 $W_1, W_2 \in T\Omega_\gamma$ ，选择一个双参数变量

$$\alpha : U \times [0, 1] \rightarrow M,$$

其中， U 是 \mathbb{R}^2 中 $(0, 0)$ 的一个邻域，使得

$$\alpha(0, 0, t) = \gamma(t), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0, t) = W_1(t), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0, t) = W_2(t).$$

(与 §11 比较)。于是 **Hesse 泛函** $E_{**}(W_1, W_2)$ 将定义为下面的二阶偏导数

$$\left. \frac{\partial^2 E(\bar{\alpha}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{(0,0)},$$

其中， $\bar{\alpha}(u_1, u_2) \in \Omega$ 表示路径 $\bar{\alpha}(u_1, u_2)(t) = \alpha(u_1, u_2, t)$ 。这个二阶偏导数将被简写为 $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$ 。

需要下面的定理来证明 E_{**} 是良定义的。

定理 13.1 (第二变分公式). 令 $\bar{\alpha} : U \rightarrow \Omega$ 是测地线 γ 的一个双参数变分，其变分向量场为

$$W_i = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u_i}(0, 0) \in T\Omega_\gamma, \quad i = 1, 2.$$

则能量函数的二阶导数 $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$ 等于

$$-\sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V \right\rangle dt,$$

其中， $V = \frac{d\gamma}{dt}$ 表示速度向量场，并且其中

$$\Delta_t \frac{DW_1}{dt} = \frac{DW_1}{dt}(t^+) - \frac{DW_1}{dt}(t^-)$$

表示 $\frac{DW_1}{dt}$ 在单位开区间中的有限多个间断点之一处的跳跃。

证明. 根据定理 12.2, 我们有

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u_2} - \sum_t \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} = & - \sum_t \left\langle \frac{D}{du_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle - \sum_t \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{du_1} \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \\ & - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{du_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{du_1} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

让我们为 $(u_1, u_2) = (0, 0)$ 估计这个表达式. 因为 $\gamma = \bar{\alpha}(0, 0)$ 是一条不折的测地线, 我们有

$$\Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0,$$

所以第一项与第三项为零.

整理第二项, 我们得到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = - \sum \left\langle W_2, \Delta_t \frac{D}{dt} W_1 \right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D}{du_1} \frac{D}{dt} V \right\rangle dt. \quad (13.2)$$

为了交换两个算子 $\frac{D}{du_1}$ 和 $\frac{D}{dt}$, 我们需要代入曲率公式中,

$$\frac{D}{du_1} \frac{D}{dt} V - \frac{D}{dt} \frac{D}{du_1} V = R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \right) V = R(V, W_1) V.$$

结合恒等式 $\frac{D}{du_1} V = \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} = \frac{D}{dt} W_1$ 得到

$$\frac{D}{du_1} \frac{\partial}{\partial t} V = \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1) V. \quad (13.3)$$

把这个表达式代入 (13.2) 就完成了定理 13.1 的证明. \square

推论 13.4. 表达式 $E_{**}(W_1, W_2) = \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$ 是 W_1 和 W_2 的一个良定义的对称双线性函数.

证明. 第二变分公式说明 $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$ 只依赖于变分向量场 W_1 和 W_2 , 所以 $E_{**}(W_1, W_2)$ 是良定义的. 这个公式也说明 E_{**} 是双线性的. 对称性

$$E_{**}(W_1, W_2) = E_{**}(W_2, W_1),$$

完全不能从第二变分公式看出; 但能直接从对称性 $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 E}{\partial u_2 \partial u_1}$ 得到. \square

注 13.5. 双线性配对 E_{**} 的对角项 $E_{**}(W, W)$ 可以用 γ 的单参数变分来描述. 实际上

$$E_{**}(W, W) = \frac{d^2 E \circ \bar{\alpha}}{du^2}(0),$$

其中, $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ 表示 γ 的任意单参数变分, 其变分向量场 $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)$ 等于 W . 为了证明这个恒等式, 只需引入双参数变分

$$\bar{\beta}(u_1, u_2) = \bar{\alpha}(u_1 + u_2),$$

并注意到

$$\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_i} = \frac{d\bar{\alpha}}{du}, \quad \frac{\partial^2 E \circ \bar{\beta}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{d^2 E \circ \bar{\alpha}}{du^2}.$$

作为这个注的应用，我们有下面引理。

引理 13.6. 如果 γ 是从 p 到 q 的极小测地线，则双线性配对 E_{**} 是半正定的。因此， E_{**} 的指标 λ 为零。

证明. 不等式 $E(\bar{\alpha}(u)) \geq E(\gamma) = E(\bar{\alpha}(0))$ 意味着 $\frac{d^2 E(\bar{\alpha}(u))}{du^2}$ 在 $u = 0$ 处的值 ≥ 0 ，因此，对于所有 W 有 $E_{**}(W, W) \geq 0$. \square

§ 14. Jacobi 场, E_{**} 的零化子空间

沿测地线 γ 的向量场 J 称为 **Jacobi 场 (Jacobi field)**，如果它满足 Jacobi 微分方程

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(V, J)V = 0,$$

其中, $V = \frac{d\gamma}{dt}$. 这是一个二阶线性微分方程. [它可以通过选择沿 γ 的标准正交平行向量场 P_1, \dots, P_n 变成一个更为熟悉的方式. 再令 $J(t) = \sum f^i(t)P_i(t)$, 方程变为

$$\frac{d^2 f^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^n a_j^i(t)f^j(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

其中, $a_j^i = \langle R(V, P_j)V, P_i \rangle$.] 因此, Jacobi 方程有 $2n$ 个线性无关的解, 其中每个解在 γ 上都是处处有定义的. 这些解都是 C^∞ 可微的. 一个给定的 Jacobi 场 J 由它的初始条件

$$J(0), \frac{DJ}{dt}(0) \in TM_{\gamma(0)}$$

完全确定。

令 $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$ 是测地线 γ 上的两点, 且有 $a \neq b$.

定义. p 和 q 称为沿 γ **共轭 (conjugate)**¹, 如果存在一个沿 γ 的非零 Jacobi 场 J , 在 $t = a$ 和 $t = b$ 处为零. p 和 q 作为共轭点的**重数 (multiplicity)** 等于所有这种 Jacobi 场组成的向量空间的维数。

现在令 γ 是 $\Omega = \Omega(M; p, q)$ 中的一条测地线. 回忆一下 Hesse 泛函

$$E_{**} : T\Omega_\gamma \times T\Omega_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

的**零化子空间 (null space)** 是所有满足下面条件的 $W_1 \in T\Omega_\gamma$ 所有构成的向量空间: 对于所有 W_2 有 $E_{**}(W_1, W_2) = 0$. E_{**} 的零化数 ν 等于这个零化子空间的维数. E_{**} 是**退化的 (degenerate)**, 如果 $\nu > 0$.

定理 14.1. 一个向量场 $W_1 \in T\Omega_\gamma$ 属于 E_{**} 的零化子空间, 当且仅当 W_1 是一个 Jacobi 场. 因此, E_{**} 是退化的当且仅当端点 p 和 q 沿 γ 共轭. E_{**} 的零化数等于 p 和 q 作为共轭点的重数。

与推论 12.3 的证明比较. 若 J 是一个 Jacobi 场, 在 p 和 q 处为零, 则 J 当然属于 $T\Omega_\gamma$. 第二变分公式 (定理 13.1) 表述为

$$-\frac{1}{2}E_{**}(J, W_2) = \sum_t \langle W_2(t), 0 \rangle + \int_0^1 \langle W_2, 0 \rangle dt = 0.$$

¹如果 γ 与自身相交, 则这个定义就变得含糊不清了. 所以, 我们宁可说参数值 a 和 b 关于 γ 共轭。

因此, J 属于零化子空间。

反之, 假设 W_1 属于 E_{**} 的零化子空间。选择 $[0, 1]$ 的一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, 使得 $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 对于每个 i 都是光滑的。令 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是一个光滑函数, 在参数值 t_0, t_1, \dots, t_k 处为零, 其它各处均为正; 并且令

$$W_2(t) = f(t) \left(\frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V \right)_t.$$

则

$$-\frac{1}{2}E_{**}(W_1, W_2) = \sum 0 + \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V \right\|^2 dt.$$

因为这个表达式为零, 得到对于每个 i , $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 都是 Jacobi 场。

现在令 $W'_2 \in T\Omega_\gamma$ 是一个场使得对于 $i = 1, \dots, k$ 有 $W'_2(t_i) = \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt}$ 。则

$$-\frac{1}{2}E_{**}(W_1, W'_2) = \sum_{i=1}^{k-1} \left\| \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt} \right\|^2 + \int_0^1 0 dt = 0$$

因此, $\frac{DW_1}{dt}$ 没有跳跃。但 Jacobi 方程的一个解 W_1 由向量 $W_1(t_i)$ 和 $\frac{DW_1}{dt}(t_i)$ 完全确定。因此, 由此可得这 k 个 Jacobi 场 $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, 2, \dots, k$, 组合给出一个 Jacobi 场 W_1 , 该场在整个单位区间上具有 C^∞ 可微性。这就完全证明了定理 14.1。□

由此可得, E_{**} 的零化数 ν 总是有限数, 这是因为沿 γ 只有有限多个线性无关的 Jacobi 场。

注 14.2. 实际上, 零化数 ν 满足 $0 \leq \nu < n$ 。因为在 $t = 0$ 时为零的 Jacobi 场组成的空间正好具有维数 n , 所以显然有 $\nu < n$ 。我们将构造一个 Jacobi 场的例子, 使得它在 $t = 0$ 时为零, 但在 $t = 1$ 时不为零; 这将意味着 $\nu < n$ 。实际上, 令 $J_t = tV_t$, 其中 $V = \frac{d\gamma}{dt}$ 表示速度向量场。则

$$\frac{DJ}{dt} = 1 \cdot V + t \frac{DV}{dt} = V$$

(由于 $\frac{DV}{dt} = 0$), 因此 $\frac{D^2 J}{dt^2} = 0$ 。此外, $R(V, J)V = tR(V, V)V = 0$, 因为 R 关于前两个变量时反对称的。因此, J 满足 Jacobi 方程。因为 $J_0 = 0$, $J_1 \neq 0$, 证毕。

例 1. 假设 M 是“平坦的”, 即是曲率张量恒为零。则 Jacobi 方程变成 $\frac{D^2 J}{dt^2} = 0$ 。设定 $J(t) = \sum f^i(t)P_i(t)$, 其中 P_i 是平行的, 这变成了 $\frac{df^i}{dt^2} = 0$ 。显然, 沿 γ 的 Jacobi 场至多只能有一个零点。因此, 没有共轭点, 而 E_{**} 是非退化的。

例 2. 假设 p 和 q 是单位球面 S^n 上的对径点, 令 γ 是从 p 到 q 的一条大圆弧。则我们将看到 p 和 q 是重数为 $n-1$ 的共轭点。因此在这个例子中, E_{**} 的零化数 ν 取其最大值。证明将依赖于下面的讨论。

令 α 是 γ 的一个单参数变分, 不必保持端点固定, 使得每个 $\bar{\alpha}(u)$ 都是一个测地线。即: 令

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$$

是一个 C^∞ 映射, 使得 $\alpha(0, t) = \gamma(t)$, 并且使得每个 $\bar{\alpha}(u)$ [由 $\bar{\alpha}(u)(t) = \alpha(u, t)$ 给出] 都是测地线。

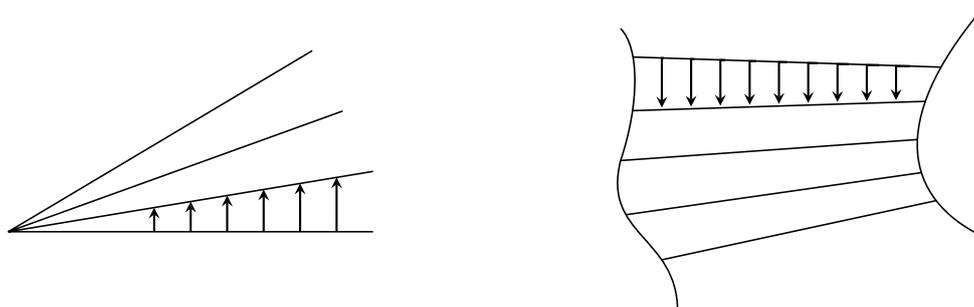
引理 14.3. 如果 α 是 γ 的测地线变分, 则变分向量场 $W(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ 是沿 γ 的 Jacobi 场。

证明. 如果 α 是 γ 的测地线变分, 则 $\frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ 恒为零, 因此

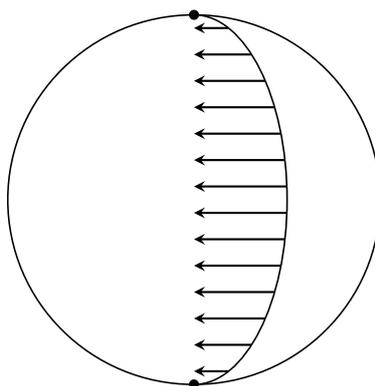
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{du} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{D}{du} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ &= \frac{D^2}{dt^2} \frac{\partial \alpha}{\partial u} + R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \end{aligned}$$

[与方程 (13.2) 比较]. 因此, 变分向量场 $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ 是一个 Jacobi 场。

因此, 获得 Jacobi 场的一个方法是将测地线进行移动。



现在让我们再回到 n 维单位球面上两个对径点的例子. 旋转球面, 保持 p 和 q 固定, 沿测地线 γ 的变分向量场是一个在 p 和 q 处都为零的 Jacobi 场. 在 $n-1$ 个不同方向上旋转, 则得到 $n-1$ 个线性无关的 Jacobi 场, 所以 p 和 q 沿 γ 共轭, 重数为 $n-1$.



□

引理 14.4. 沿测地线 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ 的每个 Jacobi 场均可由 γ 的测地线变分得到。

证明. 选择 $\gamma(0)$ 的一个邻域 U , 使得 U 中任意两点均由唯一极小测地线连接起来, 这条测地线微分依赖于两个端点. 假设对于 $0 \leq t \leq \delta$ 有 $\gamma(t) \in U$. 我们将首先沿 $\gamma|_{[0, \delta]}$ 构造一个 Jacobi 场 W , 在 $t=0$ 和 $t=\delta$ 时具有任意指定的值. 选择一条曲线 $a: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, 使得 $a(0) = \gamma(0)$, 且使得 $\frac{da}{du}(0)$ 在 $TM_{\gamma(0)}$ 中的任意指定向量. 类似地, 选择一条曲线 $b: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, 使得 $b(0) = \gamma(\delta)$ 并且 $\frac{db}{du}(0)$ 任意. 现在定义变分

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \delta] \rightarrow M$$

通过令 $\bar{\alpha}(u): [0, \delta] \rightarrow M$ 是从 $a(u)$ 到 $b(u)$ 的唯一极小测地线. 则公式 $t \mapsto \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ 用已知端点条件定义一个 Jacobi 场。

沿 $\gamma|_{[0, \delta]}$ 的任意 Jacobi 场均可用下面的方式得到: 如果 $\mathcal{J}(\gamma)$ 表示沿着 γ 的所有 Jacobi 场 W 组成的向量空间, 则公式 $W \rightarrow (W(0), W(\delta))$ 定义一个线性映射

$$\ell: \mathcal{J}(\gamma) \rightarrow TM_{\gamma(0)} \times TM_{\gamma(\delta)}.$$

我们已经证明了 l 是映成的像。因为这两个向量空间具有相同的维度 $2n$ ，从此可得 l 是一个同构。即：由在 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(\delta)$ 处的值所确定的一个 Jacobi 场（更一般地，一个 Jacobi 场由它在任意两个非共轭点处的值所确定）。因此，上面的构造产生沿 $\gamma|_{[0,\delta]}$ 的一切可能的 Jacobi 场。

$\bar{\alpha}(u)$ 限制于区间 $[0, \delta]$ 并不基础。如果 u 充分小，则利用 $[0, 1]$ 的紧致性，可以把 $\bar{\alpha}(u)$ 延长为一条在整个单位区间 $[0, 1]$ 上都有定义的测地线。这就产生了一个测地线变分

$$\alpha' : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \delta] \rightarrow M$$

与任意给定的 Jacobi 场作为变分向量场。 □

注 14.5. 上面的讨论说明：在任意这样的邻域 U 中，沿 U 中一个测地线段的 Jacobi 场是由它在这条测地线的两个端点处的值所唯一确定的。

注 14.6. 上面的证明也说明：存在 0 的邻域 $(-\delta, \delta)$ ，使得如果 $t \in (-\delta, \delta)$ ，则 $\gamma(t)$ 和 $\gamma(0)$ 沿 γ 不共轭。我们将在推论 15.2 中看到 $\gamma(0)$ 沿整个测地线 γ 的共轭点的集合没有聚点。

§ 15. 指标定理

Hesse 泛函

$$E_{**} : T\Omega_\gamma \times T\Omega_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

的指标 λ 定义为 $T\Omega_\gamma$ 的一个子空间的最大维数，该子空间上 E_{**} 为负定的。我们将证明下面的定理：

定理 15.1 (Morse). E_{**} 的指标 λ 等于 $\gamma(0)$ 沿 γ 的共轭点 $\gamma(t)$ ($0 < t < 1$) 的个数；每个这样的共轭点都是按照它的重数来计数的。这个指标 λ 总是有限的²。

作为一个直接推论，我们有

推论 15.2. 一个测地线段 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ 只能包含有限多个沿 γ 与 $\gamma(0)$ 的共轭点。

为了证明定理 15.1，我们首先来估计 λ 的值，方法是：把向量空间 $T\Omega_\gamma$ 分成两个相互正交的子空间，使得 E_{**} 在其中之一上是正定的。

每个点 $\gamma(t)$ 包含在一个开集 U 中使得 U 的任意两点都由唯一一条极小测地线连接起来，而这条测地线微分依赖于它的端点（见 §10）。选择单位区间的一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ 足够精细，使得每个线段 $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 都位于开集 U 的内部，并且使得每个 $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 都是极小测地线。

令 $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, t_2, \dots, t_k) \subset T\Omega_\gamma$ 是一个向量空间，由沿 γ 的所有这样的向量场 W 组成：

(1) 对每个 i ， $W|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 都是沿 $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 的 Jacobi 场。

(2) W 在端点 $t = 0$ ， $t = 1$ 处为零。

因此， $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \dots, t_k)$ 是沿 γ 的分段 Jacobi 场组成的一个有限维向量空间。

令 $T' \subset T\Omega_\gamma$ 是一个向量空间，由所有满足下述条件的向量场 $W \in T\Omega_\gamma$ 组成： $W(t_0) = 0, W(t_1) = 0, W(t_2) = 0, \dots, W(t_k) = 0$ 。

引理 15.3. 向量空间 $T\Omega_\gamma$ 分裂成直和 $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, t_2, \dots, t_k) \oplus T'$ 。这两个子空间关于内积 E_{**} 相互正交。此外， E_{**} 在 T' 上的限制是正定的。

²关于这个结果的推广，见 [32]。

证明. 给定任意向量场 $W \in T\Omega_\gamma$ 令 W_1 记为 $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, t_2, \dots, t_k)$ 中唯一“分段 Jacobi 场”使得对于 $i = 0, 1, \dots, k$ 有 $W_1(t_i) = W(t_i)$. 从注 14.5 得到 W_1 存在并且是唯一的. 显然 $W - W_1$ 属于 T' . 因此, 两个子空间 $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \dots, t_k)$ 和 T' 生成 $T\Omega_\gamma$, 并且仅有零向量场这一共同点.

如果 W_1 属于 $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, t_2, \dots, t_k)$ 而 W_2 属于 T' , 则第二变分公式 (定理 13.1) 具有形式

$$\frac{1}{2}E_{**}(W_1, W_2) = - \sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle - \int_0^1 \langle W_2, 0 \rangle dt = 0.$$

因此, 这两个子空间关于 E_{**} 是相互正交的.

对于任意 $W \in T\Omega_\gamma$, Hesse 泛函 $E_{**}(W, W)$ 可以解释为二阶导数 $\frac{d^2 E \circ \bar{\alpha}}{du^2}(0)$, 其中 $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ 是 γ 的任意一个变分, 其变分向量场 $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)$ 等于 W (与注 13.5 比较). 如果 W 属于 T' , 则可假设我们选取的 $\bar{\alpha}$ 使得 $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k)$ 这些点保持固定. 换言之, 我们可以假设对于 $i = 0, 1, \dots, k$ 有 $\bar{\alpha}(u)(t_i) = \gamma(t_i)$.

证明当 $W \in T'$ 时, $E_{**}(W, W) \geq 0$. 事实上, 每个 $\bar{\alpha} \in \Omega$ 都是一条从 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(t_1)$ 到 $\gamma(t_2)$ 到 \dots 到 $\gamma(1)$ 的逐段光滑路径. 但每个 $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 是一条极小测地线, 并且因此与连接其端点的任意其它路径相比具有较小的能量. 这证明了

$$E(\bar{\alpha}(u)) \geq E(\gamma) = E(\bar{\alpha}(0)).$$

因此, 二阶导数在 $u = 0$ 处的值必须 ≥ 0 .

现证当 $W \in T'$ 且 $W \neq 0$ 时, $E_{**}(W, W) > 0$. 假设 $E_{**}(W, W) = 0$. 则 W 就位于 E_{**} 的零化子空间中. 事实上, 对于任意 $W_1 \in T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \dots, t_k)$, 我们已经看到 $E_{**}(W_1, W) = 0$. 对于任意 $W_2 \in T'$, 不等式

$$0 \leq E_{**}(W + cW_2, W + cW_2) = 2cE_{**}(W_2, W) + c^2E_{**}(W_2, W_2)$$

对于 c 所有取值成立, 所以 $E_{**}(W_2, W) = 0$. 因此, W 位于零化子空间中. 但 E_{**} 的零化子空间是由 Jacobi 场组成的. 因为 T' 不包含除零外的 Jacobi 场, 这意味着 $W = 0$.

因此, 二次型 $E_{**}(W, W)$ 在 T' 上是正定的. 这就完成了引理 15.3 的证明. \square

一个直接结果如下:

引理 15.4. E_{**} 的指标 (或零化数) 等于 E_{**} 限制在分段 Jacobi 场组成的子空间 $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \dots, t_k)$ 上的指标 (或零化数). 特别地, (因为 $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \dots, t_k)$ 是有限维向量空间) 指标 λ 总是有限的.

证明很直接.

令 γ_τ 表示 γ 限制到区间 $[0, \tau]$. 因此, $\gamma_\tau : [0, \tau] \rightarrow M$ 是一个从 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(\tau)$ 的测地线. 令 $\lambda(\tau)$ 表示与这条测地线相关的 Hesse 泛函 $(E_0^\tau)_{**}$ 的指标. 因此 $\lambda(1)$ 是我们实际尝试计算的指标. 首先注意到:

结论 1. $\lambda(\tau)$ 是 τ 的单调函数.

对于如果 $\tau < \tau'$, 则存在一个 $\lambda(\tau)$ 维向量空间 \mathcal{V} , 其组成元素是沿 γ_τ 的向量场, 在 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(\tau)$ 处为零, 使得 $(E_0^\tau)_{**}$ 在这个向量空间上是负定的. \mathcal{V} 中的每个向量场都可以扩展为沿 $\gamma_{\tau'}$ 的向量场, 其在 $\gamma(\tau)$ 和 $\gamma(\tau')$ 之间恒为零. 因此, 我们获得一个由沿 $\gamma_{\tau'}$ 的场组成的 $\lambda(\tau)$ 维向量空间, 使得 $(E_0^{\tau'})_{**}$ 在其上是负定的. 因此, $\lambda(\tau) \leq \lambda(\tau')$.

结论 2. 当 τ 取小值时, $\lambda(\tau) = 0$.

对于如果 τ 充分小, 则 γ_τ 是一条极小测地线, 因此根据引理 13.6 有 $\lambda(\tau) = 0$ 。

现在让我们来考查 $\lambda(\tau)$ 的间断点。首先注意到 $\lambda(\tau)$ 是左连续的。

结论 3. 对于所有足够小 $\varepsilon > 0$, 我们有 $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$ 。

证明. 根据引理 15.3, 数 $\lambda(1)$ 可以被解释为有限维向量空间 $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \dots, t_k)$ 上的一个二次型指标。我们可以假设所取的划分使得 $t_i < \tau < t_{i+1}$ 。则指标 $\lambda(\tau)$ 可以被解释为沿 γ_τ 的分段 Jacobi 场的对应的向量空间上的一个二次型 H_τ 的指标。这个向量空间可以使用 $[0, \tau]$ 的划分 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \tau$ 构造。因为一个分段 Jacobi 场由它在断点 $\gamma(t_i)$ 处的值唯一确定的, 这个向量空间同构于直和

$$\Sigma = TM_{\gamma(t_1)} \oplus TM_{\gamma(t_2)} \oplus \dots \oplus TM_{\gamma(t_i)}.$$

注意到这个向量空间 Σ 独立于 τ 。显然, Σ 上的二次型 H_τ 是随 τ 连续变化的。

现在 H_τ 在一个 $\lambda(\tau)$ 维的子空间 $V \subset \Sigma$ 上是负定的。对于所有充分接近于 τ 的 τ' 而言, 所得到的 $H_{\tau'}$ 在 V 上是负定的。因此, $\lambda(\tau') \geq \lambda(\tau)$ 。但是如果 $\tau' = \tau - \varepsilon < \tau$, 则根据结论 1 我们也有 $\lambda(\tau - \varepsilon) \leq \lambda(\tau)$ 。因此, $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$ 。□

结论 4. 令 ν 是 Hesse 泛函 $(E_0^\tau)_{**}$ 的零化数, 则对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$\lambda(\tau + \varepsilon) = \lambda(\tau) + \nu.$$

因此, 当变量 t 经过重数为 ν 的共轭点时, 函数 $\lambda(t)$ 的跳跃是 ν , 除此之外, 这个函数是连续的。这个结论显然完全证明了指标定理。

证明. 现在来证明 $\lambda(\tau + \varepsilon) \leq \lambda(\tau) + \nu$ 。令 H_τ 和 Σ 如结论 3 的证明所述。因为 $\dim \Sigma = ni$, 我们看到 H_τ 在某个 $ni - \lambda(\tau) - \nu$ 维子空间 $V' \subset \Sigma$ 上是正定的。对于所有充分靠近 τ 的 τ' , 从此可得 $H_{\tau'}$ 在 V' 上是正定的。因此

$$\lambda(\tau') \leq \dim \Sigma - \dim V' = \lambda(\tau) + \nu.$$

现在来证明 $\lambda(\tau + \varepsilon) \geq \lambda(\tau) + \nu$ 。令 $W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}$ 是 $\lambda(\tau)$ 个沿 γ_τ 的向量场, 它们在两个端点处均为零, 使得矩阵

$$((E_0^\tau)_{**}(W_i, W_j))$$

是负定的。令 J_1, \dots, J_ν 是沿 γ_τ 的 ν 个线性无关的 Jacobi 场, 也都在两个端点处为零。注意到 ν 个向量

$$\frac{DJ_h}{dt}(\tau) \in TM_{\gamma(\tau)}$$

是线性无关的。因此可以选择沿 $\gamma_{\tau+\varepsilon}$ 的 ν 个向量场 X_1, \dots, X_ν , 使得矩阵

$$\left(\left\langle \frac{DJ_h}{dt}(\tau), X_k(\tau) \right\rangle \right)$$

等于 $\nu \times \nu$ 单位矩阵。对于 $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$ 通过令向量场 W_i 和 J_h 等于零, 我们把向量场 W_i 和 J_h 扩展到 $\gamma_{\tau+\varepsilon}$ 上。

使用第二变分公式, 我们很容易看到

$$\begin{aligned} (E_0^{\tau+\varepsilon})_{**}(J_h, W_i) &= 0 \\ (E_0^{\tau+\varepsilon})_{**}(J_h, X_k) &= 2\delta_{hk} \quad (\text{Kronecker delta}). \end{aligned}$$

现在令 c 是一个小数, 并且考虑 $\lambda(\tau) + \nu$ 个沿 $\gamma_{\tau+\varepsilon}$ 向量场

$$W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}, c^{-1}J_1 - cX_1, \dots, c^{-1}J_\nu - cX_\nu.$$

我们声明这些向量场张成一个 $\lambda(\tau) + \nu$ 维向量空间, 在这个空间上二次型 $(E_0^{\tau+\varepsilon})_{**}$ 是负定的. 事实上, $(E_0^{\tau+\varepsilon})_{**}$ 关于这个基底的矩阵是

$$\begin{pmatrix} (E_0^\tau)_{**}(W_i, W_j) & cA \\ cA^T & -4I + c^2B \end{pmatrix},$$

其中, A 和 B 是确定矩阵. 如果 c 充分小, 这个复合矩阵必为负定矩阵. 这证明了结论 4. \square

指标定理 15.1 显然从结论 2、3 和 4 得到。

§ 16. Ω^c 的有限维逼近

令 M 是一个连通 Riemann 流形, 并且令 p 和 q 是 M 的两点 (不必相异). 从 p 到 q 的所有逐段 C^∞ 路径的集合 $\Omega = \Omega(M; p, q)$ 可以赋予拓扑结构如下. 令 ρ 表示来自 M 的 Riemann 度规的拓扑度规. 给定 $\omega, \omega' \in \Omega$, 分别具有弧长 $s(t), s'(t)$, 定义它们的距离 $d(\omega, \omega')$ 为

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\omega(t), \omega'(t)) + \left[\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt} \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

(加上最后一项是为了使得能量函数

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt$$

称为从 Ω 到实数域的连续函数。) 这个度规诱导出 Ω 上所要求的拓扑结构。

给定 $c > 0$, 令 Ω^c 表示闭子集 $E^{-1}([0, c]) \subset \Omega$, 并且令 $\text{Int } \Omega^c$ 表示开子集 $E^{-1}((0, c))$, 其中 $E = E_0^1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是能量函数. 我们将研究 Ω^c 的拓扑, 通过构造它的一个有限维逼近。

选择单位区间的一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$. 令 $\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ 是 Ω 的由路径 $\omega: [0, 1] \rightarrow M$ 组成的一个子空间使得

- (1) $\omega(0) = p$ 且 $\omega(1) = q$,
- (2) 对于每个 $i = 1, \dots, k$, $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 都是测地线。

最后我们定义子空间

$$\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)^c = \Omega^c \cap \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k),$$

$$\text{Int } \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)^c = (\text{Int } \Omega^c) \cap \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k).$$

引理 16.1. 令 M 是一个完备的 Riemann 流形, c 是一个固定的正数, 使得 $\Omega^c \neq \emptyset$. 则对于 $[0, 1]$ 的所有充分精细划分 (t_0, t_1, \dots, t_k) , 集合 $\text{Int } \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)^c$ 可以自然地赋予一个有限维光滑流形的结构。

证明. 令 S 表示球体

$$\{x \in M : \rho(x, p) \leq \sqrt{c}\}.$$

注意到每个路径 $\omega \in \Omega^c$ 都位于子集 $S \subset M$ 中. 这可以从不等式 $L^2 \leq E \leq c$ 推出。

因为 M 是完备, 所以 S 是一个紧致集. 因此通过推论 10.8, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得只要 $x, y \in S$ 且 $\rho(x, y) < \varepsilon$, 则从 x 到 y 有唯一一条长度 $< \varepsilon$ 的测地线, 并且使得这个测地线微分依赖于 x 和 y 。

选择 $[0, 1]$ 的划分 (t_0, t_1, \dots, t_k) , 使得每个 $t_i - t_{i-1}$ 相差都小于 $\frac{\varepsilon^2}{c}$. 则对于每条分段测地线

$$\omega \in \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)^c$$

我们有

$$\begin{aligned} (L_{t_{i-1}}^{t_i})^2 &= (t_i - t_{i-1})(E_{t_{i-1}}^{t_i} \omega) \leq (t_i - t_{i-1})(E\omega) \\ &\leq (t_i - t_{i-1})c < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

因此, 测地线 $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 由两个端点唯一确定, 且可微地依赖于这两个端点。

分段测地线 ω 由 $(k-1)$ -元组

$$\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_{k-1}) \in M \times M \times \dots \times M$$

唯一确定。显然, 这个对应关系

$$\omega \rightarrow (\omega(t_1), \dots, \omega(t_{k-1}))$$

定义了一个 $\text{Int } \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)^c$ 和 $(k-1)$ 重乘积 $M \times M \times \dots \times M$ 的一个确定开子集之间的同胚映射。从乘积中继承可微结构, 这完成了引理 16.1 的证明。□

为了简化记号, 让我们用 B 表示分段测地线的这个流形 $\text{Int } \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)^c$ 。令

$$E' : B \rightarrow \mathbb{R}$$

表示能量函数 $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 在 B 上的限制。

定理 16.2. 函数 $E' : B \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的。此外, 对于每个 $a < c$, 集合 $B^a = (E')^{-1}[0, a]$ 是紧致的, 并且是对应集合 Ω^a 的一个形变收缩核³。 E' 点的临界点正好就是 E 在 $\text{Int } \Omega^c$ 中的临界点, 即是从 p 到 q 长度小于 \sqrt{c} 的非分段测地线。在每个这样的临界点 γ 处, $Hesse$ 泛函 E'_{**} 的指标 (或零化数) 等于 E_{**} 在 γ 处的指标 (或零化数)。

因此, 有限维流形 B 为无限维路径空间 $\text{Int } \Omega^c$ 提供一个忠实模型。作为一个直接推论, 我们有下面的基本结果。

定理 16.3. 令 M 是一个完备的 *Riemann* 流形, 并且令 $p, q \in M$ 是两点, 其沿任意长度 $\leq \sqrt{a}$ 的测地线相互不共轭。于是, Ω^a 具有一个有限 *CW* 复形的同伦型。对于 Ω^a 中每条测地线对应一个维数为 λ 的胞腔, 且在该测地线上 E_{**} 的指标为 λ 。

(特别地, 这个定理断言: Ω^a 只包含有限多测地线。)

证明. 这个定理从定理 16.2 和定理 3.5 得出。□

定理 16.2 的证明. 因为分段测地线 $\omega \in B$ 光滑依赖于 $(k-1)$ 元组

$$\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_{k-1}) \in M \times M \times \dots \times M,$$

显然, 能量 $E'(\omega)$ 也光滑依赖于这个 $(k-1)$ 元组。事实上, 我们有显式公式

$$E'(\omega) = \sum_{i=1}^k \frac{\rho(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))^2}{(t_i - t_{i-1})}.$$

³类似地, B 本身是 $\text{Int } \Omega^c$ 的形变收缩核。

对于 $a < c$, 集合 B^a 同胚于所有 $(k-1)$ 元组 $(p_1, \dots, p_{k-1}) \in S \times S \times \dots \times S$ 的集合使得

$$\sum_{i=1}^k \frac{\rho(p_{i-1}, p_i)^2}{t_i - t_{i-1}} \leq a.$$

(这里需要理解: $p_0 = p, p_k = q$)。这个集合作为一个紧致集合的一个闭子集, 当然也是紧致的。收缩映射 $r : \text{Int } \Omega^c \rightarrow B$ 定义如下。令 $r(\omega)$ 表示 B 中唯一分段测地线使得每个 $r(\omega)|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 是从 $\omega(t_{i-1})$ 到 $\omega(t_i)$ 长度 $< \varepsilon$ 的一条测地线。不等式

$$\rho(p, \omega(t))^2 \leq (L\omega)^2 \leq E\omega < c$$

意味着 $\omega[0, 1] \subset S$ 。因此, 不等式

$$\rho(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))^2 \leq (t_i - t_{i-1})(E_{t_{i-1}}^{t_i} \omega) < \frac{\varepsilon^2}{c} \cdot c = \varepsilon^2$$

意味着 $r(\omega)$ 可以这样定义。

显然, $E(r(\omega)) \leq E(\omega) < c$ 。收缩映射 r 又可以装配成一个单参数映射族

$$r_u : \text{Int } \Omega^c \rightarrow \text{Int } \Omega^c$$

如下: 对于 $t_{i-1} \leq u \leq t_i$, 令

$$\begin{cases} r_u(\omega)|_{[0, t_{i-1}]} = r(\omega)|_{[0, t_{i-1}]}, \\ r_u(\omega)|_{[t_{i-1}, u]} = \text{从 } \omega(t_{i-1}) \text{ 到 } \omega(u) \text{ 的极小测地线}, \\ r_u(\omega)|_{[u, 1]} = \omega|_{[u, 1]}. \end{cases}$$

则 r_0 是 $\text{Int } \Omega^c$ 的恒等映射, 并且 $r_1 = r$ 。容易验证 $r_u(\omega)$ 作为二元函数是连续的。这证明了 B 是 $\text{Int } \Omega^c$ 的形变收缩核。

因为 $E(r_u(\omega)) \leq E(\omega)$, 所以 B^a 显然也是 Ω^a 的形变收缩核。

每条测地线也是一条分段测地线, 所以 E 在 $\text{Int } \Omega^c$ 中的每个“临界点”显然自动位于子流形 B 中。使用第一变分公式 (定理 12.2), 显然 E' 的临界点正好是非分段测地线。

考虑流形 B 在测地线 γ 处的切空间 TB_γ 。如 §15 所述, 这个空间恒同于沿 γ 的分段 Jacobi 场组成的空间 $T\Omega_\gamma(t_0, t_1, \dots, t_k)$ 。这个恒同关系可以阐述如下。令

$$\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow B$$

是通过分段测地线的 γ 的任意变分。则沿 γ 的对应变分向量场 $\frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$ 显然是一个分段 Jacobi 场 (与引理 14.3 比较)。

现在命题 E_{**} 在 γ 处的指标 (或零化数) 等于 E'_{**} 在 γ 处的指标 (或零化数) 是引理 15.4 的直接推论。这完成了定理 16.2 的证明。□

注. 作为这个定理的一个推论, 我们获得一个完备流形的连接两个给定点 p, q 的一条极小测地线的存在性的另一种替代证明。因为如果 $\Omega^a(p, q)$ 非空, 则对应的集合 B^a 是紧致且非空的。因此, 连续函数 $E' : B^a \rightarrow \mathbb{R}$ 将在某点 $\gamma \in B^a$ 处取其极小值。这个 γ 就是所要求的极小测地线。

§ 17. 全路径空间的拓扑结构

令 M 是一个具有 Riemann 度规 g 的 Riemann 流形, 并且令 ρ 是诱导拓扑度规。令 p 和 q 是 M 的两点 (不必相异)。

在同伦理论中，我们研究从 p 到 q 的所有连续路径

$$\omega : [0, 1] \rightarrow M$$

的空间 Ω^* ，具有紧致开拓扑。这个拓扑也可以描述为由度规

$$d^*(\omega, \omega') = \max_t \rho(\omega(t), \omega'(t))$$

诱导出的拓扑结构。另一方面，我们一直在研究从 p 到 q 的逐段 C^∞ 路径组成的空间 Ω ，其度规为

$$d(\omega, \omega') = d^*(\omega, \omega') + \left[\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt} \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

因为 $d \geq d^*$ ，所以自然映射

$$i : \Omega \rightarrow \Omega^*$$

是连续的。

定理 17.1. 这个自然映射 i 是 Ω 和 Ω^* 之间的同伦等价。

(增加于 1968 年 6 月。下面的证明基于 Jr. W. B. Houston 的建议，他指出笔者对定理 17.1 的原始证明是错误的。该原始证明使用了一个所谓的同伦逆映射 $\Omega \rightarrow \Omega^*$ ，而该映射实际上甚至不是连续的。)

证明。我们将使用这样一个事实： M 的任意点都有一个开邻域 N ，该邻域在下面的意义下是“测地凸”的： N 中任意两点都可以由一条唯一极小测地线连接，这条测地线完全位于 N 内，并且微分依赖于端点。(这个结果归功于 J. H. C. Whitehead。见例子 [33]，第 246 页、[26]，第 53 页或 [34]，第 134 页)。

选择一族这样的测地凸开集 N_α 来覆盖 M 。划分区间 $[0, 1]$ 为 2^k 个子区间 $\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right]$ ，令 Ω_k^* 表示所有从 p 到 q 的连续路径 ω 的集合，它们满足下面的条件：每个子区间 $\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right]$ 的像应该包含在覆盖中某个集合 N_α 中。

显然，每个 Ω_k^* 是从 p 到 q 的所有路径空间 Ω^* 的一个开子集，并且显然 Ω^* 是序列

$$\Omega_1^* \subset \Omega_2^* \subset \Omega_3^* \subset \dots$$

的并。类似地，对应的集合

$$\Omega_k = i^{-1}(\Omega_k^*)$$

是 Ω 的开子集，并且它们的并集等于 Ω 。

我们将首先说明自然映射

$$(i|_{\Omega_k}) : \Omega_k \rightarrow \Omega_k^*$$

是一个同伦等价。对于每个 $\omega \in \Omega_k^*$ ，令 $h(\omega) \in \Omega_k$ 是一条分段测地线，它在参数值 $t = \frac{j}{2^k}$ ， $j = 0, 1, 2, \dots, 2^k$ 处与 ω 相一致，并且在每个中间区间 $\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right]$ 内是一条极小测地线。这个构造定义了一个函数

$$h : \Omega_k^* \rightarrow \Omega_k,$$

并且不难验证 h 是连续的。

正如第55页的定理 16.2 的证明，可以验证复合映射 $(i|_{\Omega_k}) \circ h$ 与 Ω_k^* 上的恒等映射同伦，并且复合映射 $h \circ (i|_{\Omega_k})$ 与 Ω_k 上的恒等映射同伦。这证明了 $i|_{\Omega_k}$ 是一个同伦等价。

为了完成定理 17.1，我们利用附录中的结果。使用第66页上的例 2，注意到空间 Ω 是子集序列 Ω_k 的同伦直极限。类似地，注意到 Ω^* 是子集序列 Ω_k^* 的同伦直极限。因此，定理 A (第66页) 说明 $i: \Omega \rightarrow \Omega^*$ 是一个同伦等价。这完成了定理 17.1 的证明。 \square

已知空间 Ω^* 具有 CW 复形的同伦型 (见 [35])。因此，我们有

推论 17.2. Ω 具有一个 CW 复形的同伦型。

这个论述可以加强如下：

定理 17.3 (Morse 理论的基本定理). 令 M 是一个完备 Riemann 流形，并且令 $p, q \in M$ 是两个点，沿任意测地线不共轭。则 $\Omega(M; p, q)$ (或 $\Omega^*(M; p, q)$) 具有一个可数 CW 复形的同伦型：对于每条从 p 到 q 指标为 λ 的测地线，这个复形有一个 λ 维胞腔。

证明. 证明类似于定理 3.5 的证明一样。选择一系列实数 $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ ，都不是能量函数 E 的临界值，使得每个区间 (a_{i-1}, a_i) 正好包括一个临界值。考虑序列

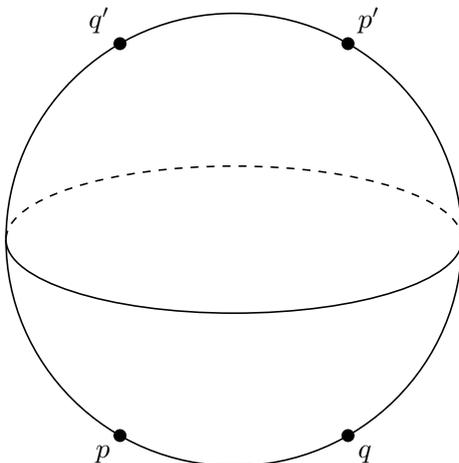
$$\Omega^{a_0} \subset \Omega^{a_1} \subset \Omega^{a_2} \subset \dots,$$

其中，我们可以假设 Ω^{a_0} 是空集。从定理 16.2 以及注 3.3 和引理 3.7 得到每个 Ω^{a_i} 的同伦型等同于在 $\Omega^{a_{i-1}}$ 粘上有限个胞腔所得到的同伦型：对于 $E^{-1}(a_{i-1}, a_i)$ 中每一条指标为 λ 的测地线，粘上一个 λ 维胞腔。现在，正如定理 3.5 的证明中一样，我们构造一个序列 CW 复形 $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ 具有所要求的那种胞腔，并且构造一个序列的同伦等价

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^{a_0} & \subset & \Omega^{a_1} & \subset & \Omega^{a_2} & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_0 & \subset & K_1 & \subset & K_2 & \subset & \dots \end{array}$$

令 $f: \Omega \rightarrow K$ 是直极限映射，显然， f 诱导各维数同伦群的同构。由于已知 Ω 具有一个 CW 复形的同伦型 (推论 17.2)，从 Whitehead 定理可得 f 是一个同伦等价。证毕。(对于一个不使用定理 17.1 的另一种证明见附录，第66页)。 \square

例 (球面 S^n 的路径空间). 假设 p 和 q 是 S^n 上两个非共轭点，即假设 $q \neq p, p'$ ，其中 p' 表示 p 的对径点。则存在从 p 到 q 的可数多条测地线 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ 如下：令 γ_0 表示从 p 到 q 的短大圆弧， γ_1 表示长大圆弧 $pq'p'q$ ， γ_2 表示大圆弧 $pqp'q'pq$ 等等。 γ_k 的下标 k 表示 p 或 p' 出现在其内部的次数。



指标 $\lambda(\gamma_k) = \mu_1 + \cdots + \mu_k$ 等于 $k(n-1)$ ，因为这个弧段内容的每个 p 或 p' 都与 p 共轭，重数是 $n-1$ 。因此，我们有

推论 17.4. 路径空间 $\Omega(S^n)$ 具有一个 CW 复形的同伦型，该复形在维数 $0, n-1, 2(n-1), 3(n-1), \dots$ 各有一个胞腔。

对于 $n > 2$ ， $\Omega(S^n)$ 的同调群可以根据上面的信息直接算出。因为 $\Omega(S^n)$ 在无限多个维数具有非零同调群，我们可以得出结论：

推论 17.5. 令 M 具有 $\Omega(S^n)$ 的同伦型，对于 $n > 2$ 。则 M 上任意两个非共轭点都可由无限多条测地线连接起来。

这是因为 $\Omega^*(M)$ 的同伦型（因而 $\Omega(M)$ 的同伦型）只依赖于 M 的同伦型。因此，在 $\Omega(M)$ 中至少存在一条指标为 0 的测地线，至少存在一条指标为 $n-1, 2(n-1), 3(n-1)$ 等的测地线。

注. 更一般地，如果 M 是任意一个不缩为一点的完备流形，则 M 的任意两个非共轭点都可由无限多条测地线连接起来。见 [36]，第 484 页。

作为推论 17.5 的另一个应用，我们可以给出 Freudenthal 悬垂定理的一个证明（与推论 22.3 比较）。

§ 18. 非共轭点的存在性

当 p 和 q 沿任意测地线都不互为共轭点时，定理 17.3 对空间 $\Omega(M; p, q)$ 给出了一个较好的描述。本节将通过证明这类非共轭点总是存在，从而论证这一结果。

回忆：设 $f: N \rightarrow M$ 是两个同维度流形之间的光滑映射。如果在点 $x \in N$ 处，切空间之间所诱导的映射

$$f_* : TN_x \rightarrow TM_{f(x)}$$

不是一对一的。我们把这个定义用于指数映射

$$\exp = \exp_p : TM_p \rightarrow M.$$

（我们将假设 M 是完备的，使得 \exp 处处有定义。然而，这个假设可以很容易地去掉。）

定理 18.1. 点 $\exp(v)$ 沿着从 p 到 $\exp(v)$ 的测地线 γ_v 与 p 共轭，当且仅当指数映射 \exp 在 v 处是临界的 (*critical*)。

证明. 假设 \exp 在 $v \in TM_p$ 处是临界的，则存在某个非零的 $X \in T(TM_p)_v$ （这是看成流形的 TM_p 在 v 处的切空间），使得 $\exp_*(X) = 0$ 。令 $u \mapsto v(u)$ 是 TM_p 中的一条路径，使得 $v(0) = v$ 和 $\frac{dv}{du}(0) = X$ 。则由 $\alpha(u, t) = \exp(tv(u))$ 定义的映射 α ，其是由 $t \mapsto \exp(tv)$ 给出的测地线 γ_v 的测地线变分。因此，由 $t \mapsto \frac{\partial}{\partial u}(\exp(tv(u))) \Big|_{u=0}$ 给出的向量场 W 是沿着 γ_v 的一个 Jacobi 场。显然， $W(0) = 0$ 。我们也有

$$W(1) = \frac{\partial}{\partial u}(\exp(v(u))) \Big|_{u=0} = \exp_* \frac{dv(u)}{du}(0) = \exp_* X = 0.$$

但是这个场并不恒为零，因为

$$\frac{DW}{dt}(0) = \frac{D}{du} \frac{\partial}{\partial t}(\exp(tv(u))) \Big|_{(0,0)} = \frac{D}{du} v(u) \Big|_{u=0} \neq 0.$$

所以, 存在从 p 到 $\exp(v)$ 沿着 γ_v 的非零 Jacobi 场, 在这些点处为零, 因此 p 和 $\exp v$ 沿 γ_v 共轭。

现在假设 \exp_* 在 v 处是非奇异的。在 $T(TM_p)_v$ 中选择 n 个线性无关向量 X_1, \dots, X_n 。则 $\exp_*(X_1), \dots, \exp_*(X_n)$ 是线性无关的。在 TM_p 中选择路径 $u \mapsto v_1(u), \dots, u \mapsto v_n(u)$, 满足 $v_i(0) = v$ 和 $\frac{dv_i(u)}{du}(0) = X_i$ 。

于是, 如上所构造的 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 提供了沿测地线 γ_v 的 n 个 Jacobi 场 W_1, \dots, W_n , 它们在点 p 处为零。因为 $W_i(1) = \exp_*(X_i)$ 是线性无关的, 因此这些 W_i 的任意非平凡线性组合都不可能在此 $\exp v$ 处为零。又因为 n 是沿 v 且在 p 处为零的 Jacobi 场空间的维数, 显然沿 γ_v 不存在在 p 和 $\exp v$ 两点同时为零的非平凡 Jacobi 场。证毕。 \square

推论 18.2. 令 $p \in M$ 。则对于几乎所有 $q \in M$, p 和 q 沿任意测地线相互不共轭。

证明. 直接从定理 18.1 以及 Sard 定理 6.1 得到。 \square

§ 19. 拓扑与曲率之间的某些关系

本节要讨论“负曲率”流形或“正曲率”流形上的测地线的行为。

引理 19.1. 假设对于每个 $p \in M$ 和切空间 TM_p 中每一对向量 A, B 有 $\langle R(A, B)A, B \rangle \leq 0$ 。那么, M 的任意两点沿任意测地线都不共轭。

证明. 令 γ 是一条测地线, 其速度向量场为 V ; 并且令 J 是沿 γ 的一个 Jacobi 场。则

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(V, J)V = 0$$

使得

$$\left\langle \frac{D^2 J}{dt^2}, J \right\rangle = -\langle R(V, J)V, J \rangle \geq 0.$$

因此

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle = \left\langle \frac{D^2 J}{dt^2}, J \right\rangle + \left\| \frac{DJ}{dt} \right\|^2 \geq 0.$$

因此, 函数 $\left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle$ 是单调递增的, 并且在 $\frac{DJ}{dt} \neq 0$ 时是严格单调递增的。

如果 J 在 0 和 $t_0 > 0$ 处同时为零, 则函数 $\left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle$ 在 0 和 t_0 处也同时为零, 并且因此在整个区间 $[0, t_0]$ 上必定恒为零。这意味着

$$J(0) = \frac{DJ}{dt}(0) = 0,$$

使得 J 恒为零。证毕。 \square

注. 如果 A 和 B 是在 p 处的正交单位向量, 则量 $\langle R(A, B)A, B \rangle$ 被称为由 A 和 B 确定的**截面曲率 (sectional curvature)**。它等于曲面

$$(u_1, u_2) \mapsto \exp_p(u_1 A + u_2 B)$$

的 Gauss 曲率, 这个曲面是由通过 p 的测地线张成的, 这些测地线的速度向量属于由 A 和 B 张成的子空间 (见例 [28], 第 101 页)。

[直观上, 一个流形的曲率可以用这个流形内部的“光学”描述如下。假设我们把测地线考虑成光线的路径。考虑在 p 处的一个观察者, 朝着指向点 $q = \exp(rU)$ 的单位向量 U 的方向进行观测。在点 q 处长度为 L 的一个小线段, 指向对应于单位向量 $W \in TM_p$ 的方向, 对观察者而言, 它的长度为

$$L \left(1 + \frac{r^2}{6} \langle R(U, W)U, W \rangle + (\text{包含 } r \text{ 的高次幂的项}) \right).$$

因此, 如果截面曲率为负, 则任意对象看起来都比它实际上更短。在 q 处半径为 ε 的一个小球面, 看起来就会是主半径分别是 $\varepsilon \left(1 + \frac{r^2}{6} K_1 + \dots \right), \dots, \varepsilon \left(1 + \frac{r^2}{6} K_n + \dots \right)$ 的一个椭球面, 其中 K_1, \dots, K_n 表示线性变换 $W \mapsto R(U, W)U$ 的特征值。体积为 v 的任意小物体, 看起来具有体积

$$v \left(1 + \frac{r^2}{6} (K_1 + K_2 + \dots + K_n) + (\text{高阶项}) \right),$$

其中, $K_1 + \dots + K_n$ 等于“Ricci 曲率” $K(U, U)$, 如本节之后定义。]

这里有一些曲率 ≤ 0 的完备流形的熟悉的例子:

- (1) Euclid 空间, 曲率为 0。
- (2) 抛物面 $z = x^2 - y^2$, 曲率 < 0 。
- (3) 旋转双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, 曲率 < 0 。
- (4) 螺旋面 $x \cos z + y \sin z = 0$, 曲率 < 0 。

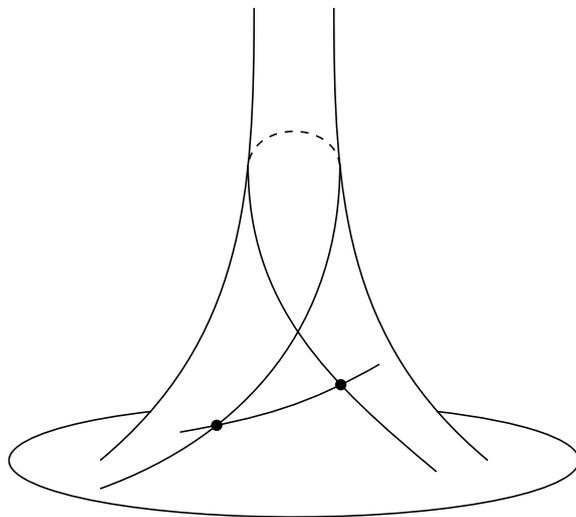
注. 在所有这些例子中, 曲率全都取任意接近于零的值。现在还不知道, 三维空间中是否存在一个完备曲面, 曲率为负, 但上确界不为零。

一个处处截面曲率为负的流形的著名例子是伪球面

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} + \operatorname{sech}^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z > 0$$

其 Riemann 度规由 \mathbb{R}^3 诱导出。这里 Gauss 曲率具有常数值 -1 。

在这个曲面上, 没有测地线具有共轭点, 尽管两条测地线可能在不止一个点相交。伪球面给出了一种非 Euclid 几何, 其中任意三角形的内角和都小于 π 弧度。这个流形是不完备的。事实上, Hilbert 的一个定理说明: 任意常值负曲率的完备曲面都不能嵌入 \mathbb{R}^3 。(例如, 见 [37], 第 137 页)。



然而，确实存在常值负曲率的完备 Riemann 流形（例如，见 [28]，第 114-117 页）。这样一个流形甚至可以是紧致的，例如，亏格 ≥ 2 的一个曲面（与 [38] 的第 228 页比较）。

定理 19.2 (Cartan⁴)。假设 M 是单连通的完备 Riemann 流形，截面曲率 $\langle R(A, B)A, B \rangle$ 处处 ≤ 0 。于是， M 的任意两点都可由唯一一条测地线连接起来。此外， M 微分同胚于 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 。

证明。因为不存在共轭点，所以从指标定理可得从 p 到 q 的每一条测地线都具有指标 $\lambda = 0$ 。于是，定理 17.3 断言：路径空间 $\Omega(M; p, q)$ 具有一个零维 CW 复形的同伦型，对于每条测地线这个复形有一个顶点。

M 是单连通的假设意味着 $\Omega(M; p, q)$ 是连通的。因为一个连通的零维 CW 复形必须是一个点组成，所以从 p 到 q 恰好有一条测地线。

因此，指数映射 $\exp_p : TM_p \rightarrow M$ 是一一到上的映射。但是，从定理 18.1 得到 \exp_p 处处都是非临界的，使得 \exp_p 局部是一个微分同胚。结合这两个事实，我们看出 \exp_p 是一个整体微分同胚。这就完整证明了定理 19.2。□

更一般地，假设 M 不是单连通的，但却是完备的，并且截面曲率 ≤ 0 。（例如， M 可以是一个平直环面 $S^1 \times S^1$ ，或者一个亏格 ≥ 2 的紧致曲面具有负曲率）。则定理 19.2 适用于 M 的泛覆盖空间 \widetilde{M} 。因为，显然可见 \widetilde{M} 从 M 处继承了一个 Riemann 度规，其中 M 是测地完备流形，并且具有截面曲率 ≤ 0 。

给定两点 $p, q \in M$ ，从 p 到 q 路径的每个同伦类恰好包含一条测地线。

\widetilde{M} 是可缩的事实在 M 的拓扑结构上加上很强的限制。例如：

推论 19.3。如果 M 是完备的且满足 $\langle R(A, B)A, B \rangle \leq 0$ ，则对于 $i > 1$ ，同伦群 $\pi_i(M)$ 为零；并且 $\pi_1(M)$ 除了恒元外不含任意有限阶元素。

证明。显然，对于 $i > 1$ ，有 $\pi_i(M) = \pi_i(\widetilde{M})$ 。因为 \widetilde{M} 是可缩的，所以上同调群 $H^k(M)$ 可以等同于群 $\pi_1(M)$ 的上同调群 $H^k(\pi_1(M))$ 。（例如，见 [46]，第 200-202 页）。现在假设 $\pi_1(M)$ 包含一个非平凡有限循环子群 G 。则对于 M 的一个合适的覆盖空间 \widehat{M} ，我们有 $\pi_1(\widehat{M}) = G$ 。因此

$$H^k(G) = H^k(\widehat{M}) = 0 \text{ 对于 } k > n.$$

但是，一个有限循环群的上同调群在任意高维度是非平凡的。这给出了一个矛盾。证毕。□

现在我们来考虑“正曲率”流形。在这种情况下，与其考虑截面曲率，我们不如考虑 Ricci 张量（有时称为“平均曲率张量”），从而可以得到更为精细的结果。

定义。Riemann 流形 M 在一点 p 处的 **Ricci 张量 (Ricci tensor)** 是一个双线性映射

$$K : TM_p \times TM_p \rightarrow \mathbb{R}$$

定义如下：令 $K(U_1, U_2)$ 是从 TM_p 到 TM_p 的线性变换

$$W \mapsto R(U, W)U_2$$

的迹（按经典术语，张量 K 是由 R 通过缩并得到的）。很容易从引理 9.3 得到 K 是对称的： $K(U_1, U_2) = K(U_2, U_1)$ 。

Ricci 张量与截面曲率的关联如下。令 U_1, \dots, U_n 是切空间 TM_p 的标准正交基。

⁴见 [51]。

结论. $K(U_n, U_n)$ 等于截面曲率 $\langle R(U_n, U_i)U_n, U_i \rangle$ 之和, 对于 $i = 1, 2, \dots, n-1$.

证明. 按照定义, $K(U_n, U_n)$ 等于矩阵 $((R(U_n, U_i)U_n, U_j))$ 的迹. 因为这个矩阵的第 n 个对角线项为零, 所以我们获得如断言所述的 $n-1$ 个截面曲率之和. \square

定理 19.4 (Myers⁵). 假设对 M 的每一点处的每个单位向量 U , Ricci 曲率 K 满足

$$K(U, U) \geq \frac{(n-1)}{r^2},$$

其中, r 是一个正的常数. 则 M 上每条长度 $> \pi r$ 的测地线都包含共轭点, 并且因此不是极小测地线.

证明. 令 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ 是一条长度为 L 的测地线. 选择沿 γ 的平行向量场 P_1, \dots, P_n , 它们在一点处标准正交, 并且因此沿 γ 处处标准正交. 我们可以假设 P_n 的指向沿 γ , 使得

$$V = \frac{d\gamma}{dt} = LP_n \text{ 并且 } \frac{DP_n}{dt} = 0.$$

令 $W_i(t) = (\sin \pi t)P_i(t)$. 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_{**}(W_i, W_i) &= - \int_0^1 \left\langle W_i, \frac{D^2W_i}{dt^2} + R(V, W_i)V \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 (\sin \pi t)^2 (\pi^2 - L^2 \langle R(P_n, P_i)P_n, P_i \rangle) dt. \end{aligned}$$

对于 $i = 1, \dots, n-1$ 求和, 我们获得

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} E_{**}(W_i, W_i) = \int_0^1 (\sin(\pi t))^2 ((n-1)\pi^2 - L^2 K(P_n, P_n)) dt.$$

现在如果 $K(P_n, P_n) \geq \frac{n-1}{r^2}$ 并且 $L > \pi r$, 则这个表达式 < 0 . 因此, 对于某些 i , $E_{**}(W_i, W_i) < 0$. 这意味着 γ 的指标是正的, 并且因此根据指标定理, γ 包含共轭点. 因而可得 γ 不是一个极小测地线. 事实上, 如果 $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ 是一个变分, 具有变分向量场 W_i , 则对于 $u = 0$, 有

$$\frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} = 0, \quad \frac{d^2E(\bar{\alpha}(u))}{du^2} < 0,$$

因此, 对于充分小的 $u \neq 0$, 有 $E(\bar{\alpha}(u)) < E(\gamma)$. 证毕. \square

例. 如果 M 是半径为 r 的球面, 则每个截面曲率等于 $\frac{1}{r^2}$. 因此, $K(U, U)$ 取常数值 $\frac{n-1}{r^2}$. 从定理 19.4 可得每个长度 $> \pi r$ 的测地线包含共轭点: 一个最好的可能结果.

推论 19.5. 如果 M 是完备的, 并且对于所有单位向量 U 有 $K(U, U) \geq \frac{n-1}{r^2} > 0$, 则 M 是紧致的, 其直径 $\leq \pi r$.

证明. 如果 $p, q \in M$ 并且令 γ 是从 p 到 q 的极小测地线, 则 γ 的长度必须 $\leq \pi r$. 因此, 所有点之间的距离 $\leq \pi r$. 因为完备流形中的有界闭集是紧致的, 由此可得 M 本身是紧致的. \square

这个推论也适用于 M 的泛覆盖空间 \widetilde{M} . 因为 \widetilde{M} 是紧致的, 从此可得基本群 $\pi_1(M)$ 是有限的. 这个断言可以加强如下.

定理 19.6. 如果 M 是一个紧致流形, 并且如果 M 的 Ricci 张量 K 处处是正定的, 则路径空间 $\Omega(M; p, q)$ 具有一个 CW 复形的同伦型, 这个复形在每个维度中只有有限多个胞腔.

⁵见 [48].

证明. 因为 M 上所有单位向量 U 组成的空间是紧致的, 由此可得连续函数 $K(U, U) > 0$ 取到一个极小值, 我们可以记这个极小值为 $\frac{n-1}{r^2} > 0$. 则每一条长度 $> \pi r$ 的测地线 $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ 有指标 $\lambda \geq 1$.

更一般地, 考虑长度 $\geq k\pi r$ 的测地线 γ . 则一个类似地讨论说明 γ 有指标 $\lambda \geq k$. 事实上, 对于每个 $i = 1, 2, \dots, k$, 我们可以构造沿 γ 的一个向量场 X_i , 其在区间 $\left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$ 之外为零, 并且使得 $E_{**}(X_i, X_i) < 0$. 显然, $E_{**}(X_i, X_j) = 0$ ($i \neq j$), 所以 X_1, \dots, X_k 张成 $T\Omega_\gamma$ 的一个 k 维子空间, 使得 E_{**} 在这个子空间上是负定的.

现在假设点 p 和 q 沿任意测地线不共轭. 则根据定理 16.3, 从 p 到 q 长度 $\leq k\pi r$ 的测地线只有有限多条. 因此, 指标 $< k$ 的测地线只有有限多条. 再结合定理 17.3, 这就完成了所要的证明. \square

注. 我不知道在 M 可以是完备但非紧致的前提下, 这个定理是否仍然为真. 目前这个证明肯定是行不通的, 因为在抛物面 $z = x^2 + y^2$ 这样的流形上, 曲率 $K(U, U)$ 的下界不会一致地远离零.

值得研究的是: 哪些流形可以承载一种度规, 使其所有截面曲率都为正. 一个具有启发性的例子是两个球面的乘积 $S^m \times S^k$, 其中 $m, k \geq 2$. 对于这个流形, Ricci 张量在处处都是正定的. 然而, 在某些确定方向上 (对应于平直环面 $S^1 \times S^1 \subset S^m \times S^k$) 的截面曲率是零. 尚且未知是否可以通过改变 $S^m \times S^k$ 度规, 使得所有截面曲率是正的. 已知如下部分结论: 如果存在这样的新度规, 则那么它不可能在 $S^m \times S^k$ 上的对合映射 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ 下保持不变. 这一结论可由 Synge 定理推出. (见 [49]).

对于另外一些关于拓扑和曲率的定理, 下面的资料是有用的: [50], [41], [40], [45].

第四章 对 Lie 群和对称空间的应用

§ 20. 对称空间

§ 21. Lie 群是对称空间

§ 22. 极小测地线组成的全流形

定理 22.1.

推论 22.2.

推论 22.3.

§ 23. Bott 关于么正群的周期性定理

§ 24. 正交群的周期性定理

附录 A 单调的并同伦型

这个附录的目的是要对定理 17.3 (Morse 理论的基本定理) 的证明中的最后一步给出另一种证法。给定路径空间 $\Omega = \Omega(M; p, q)$ 的子集 $\Omega^{a_0} \subset \Omega^{a_1} \subset \Omega^{a_2} \subset \dots$, 并且给定信息每个 Ω^{a_i} 具有 CW 复形的同伦型, 我们希望证明: 并集 Ω 也具有一个确定 CW 复形的同伦型。

更一般地考虑一个拓扑空间 X 和一个子空间序列 $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$ 。 X 的同伦型在多大程度上取决于各个 X_i 的同伦型?

为方便起见, 考虑其无限并

$$X_\Sigma = X_0 \times [0, 1] \cup X_1 \times [1, 2] \cup X_2 \times [2, 3] \cup \dots$$

这个集合作为 $X \times \mathbb{R}$ 的子集而赋予拓扑。

定义. 我们将称 X 为序列 $\{X_i\}$ 的**同伦直极限 (homotopy direct limit)**, 如果由 $p(x, \tau) = x$ 定义的投影映射 $p: X_\Sigma \rightarrow X$ 是一个同伦等价。

例 1. 假设 X 的每个点位于某些 X_i 的内部, 并且 X 是仿紧致的。则使用单位分解, 我们可以构造一个映射

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

使得对于 $x \in X_i$, 有 $f(x) \geq i + 1$, 并且对于所有的 x 有 $f(x) \geq 0$ 。则对应关系 $x \rightarrow (x, f(x))$ 把 X 同胚地映射到 X_Σ 的一个子集, 这个子集显然是一个形变收缩核。因此, p 是一个同伦等价, 并且 X 是一个同伦直极限。

例 2. 令 X 是一个 CW 复形, 并且令 X_i 是子复形, 其并集为 X 。因为 $p: X_\Sigma \rightarrow X$ 诱导各维度同伦群的同构, 从 Whitehead 定理可得 X 是同伦直极限。

例 3. 单位区间 $[0, 1]$ 不是闭子集 $[0] \cup \left[\frac{1}{i}, 1\right]$ 的序列的同伦直极限。

这个附录的主要结果是下面的定理。

定理 A. 假设 X 是 $\{X_i\}$ 的同伦直极限, Y 是 $\{Y_i\}$ 的同伦直极限。令 $f: X \rightarrow Y$ 是一个把 X_i 映射到 Y_i 的同伦等价映射。则 f 本身也是一个同伦等价。

假设定理 A 成立, 可以给出定理 17.3 的另一个证明如下。回忆我们已经构造了同伦等价的一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^{a_0} & \subset & \Omega^{a_1} & \subset & \Omega^{a_2} & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_0 & \subset & K_1 & \subset & K_2 & \subset & \dots \end{array}$$

由于 $\Omega = \bigcup \Omega^{a_i}$ 和 $K = \bigcup K_i$ 都是同伦直极限 (与前面的例 1 和例 2 比较), 从此可得极限映射 $\Omega \rightarrow K$ 也是一个同伦等价。

定理 A 的证明. 定义 $f_\Sigma: X_\Sigma \rightarrow Y_\Sigma$ 为 $f_\Sigma(x, t) = (f(x), t)$. 显然只需证明 f_Σ 是同伦等价即可.

情形 1: 假设 $X_i = Y_i$, 并且 (限制 f 而得的) 每个映射 $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ 都同伦于恒等映射. 我们必须证明 f_Σ 是一个同伦等价.

注. 在这些条件下, 自然会猜想 f_Σ 实际上一定会同伦于恒等映射. 然而可以给出反例.

对于每个 n , 令

$$h_u^n: X_n \rightarrow X_n$$

是映射的一个单参数映射族, 满足 $h_0^n = f_n$, $h_1^n =$ 恒等映射. 定义同伦

$$h_u: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$$

如下 (其中总有 $0 \leq t \leq 1$ 和 $n = 0, 1, 2, \dots$):

$$h_u(x, n+t) = \begin{cases} (h_u^n(x), n+2t), & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (h_{(3-4t)u}^n(x), n+1), & \text{对于 } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ (h_{(4t-3)u}^n(x), n+1), & \text{对于 } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

取 $u = 0$, 这定义一个映射 $h_0: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$, 其显然同伦于 f_Σ . 另一方面, 映射 $h_1: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ 具有下面的性质:

$$\begin{aligned} h_1(x, n+t) &= (x, n+2t), & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h_1(x, n+t) &\in X_{n+1} \times [n+1], & \text{对于 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

我们将说明任意这样的映射 h_1 是一个同伦等价. 事实上, 可以定义一个同伦逆 $g: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ 为公式

$$g(x, n+t) = \begin{cases} (x, n+2t), & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h_1\left(x, n + \frac{3}{2} - t\right), & \text{对于 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

这是良定义的, 因为

$$h_1\left(x, n + \frac{1}{2}\right) = h_1(x, n+1) = (x, n+1).$$

证明复合映射 h_1g 同伦于 X_Σ 的恒等映射. 注意到

$$h_1g(x, n+t) = \begin{cases} (x, n+4t), & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ h_1(x, n+2t), & \text{对于 } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h_1\left(x, n + \frac{3}{2} - t\right), & \text{对于 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

定义同伦 $H_u: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ 如下. 对于 $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$, 令

$$H_u(x, n+t) = \begin{cases} h_1g(x, n+t), & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1-u}{2} \text{ 和对于 } \frac{1}{2} + u \leq t \leq 1, \\ h_1(x, n+1-u), & \text{对于 } \frac{1-u}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + u. \end{cases}$$

这是良定义的, 因为

$$h_1 g \left(x, n + \frac{1-u}{2} \right) = h_1 g \left(x, n + \frac{1}{2} + u \right) = h_1(x, n+1-u).$$

现在 H_0 等于 $h_1 g$, 并且 $H_{\frac{1}{2}}$ 由下式给出

$$H_{\frac{1}{2}}(x, n+r) = \begin{cases} (x, n+4t), & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ (x, n+1), & \text{对于 } \frac{1}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

显然, 这个映射同伦于恒等映射。

因此, $h_1 g$ 同伦于恒等映射, 并且完全类似地讨论说明 $g h_1$ 同伦于恒等映射。这王成了情形 1 的证明。

情形 2: 现在令 X 和 Y 是任意空间。对于每个 n , 令 $g_n : Y_n \rightarrow X_n$ 是 f_n 的同伦逆。注意到图

$$\begin{array}{ccc} Y_n & \xrightarrow{g_n} & X_n \\ j_n \downarrow & & \downarrow i_n \\ Y_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & X_{n+1} \end{array}$$

(其中, i_n 和 j_n 表示包含映射) 是同伦交换的。事实上,

$$i_n g_n \sim g_{n+1} f_{n+1} i_n g_n = g_{n+1} j_n f_n g_n \sim g_{n+1} j_n.$$

选择一个特殊的同伦 $h_u^n : Y_n \rightarrow X_{n+1}$ 满足 $h_0^n = i_n g_n$, $h_1^n = g_{n+1} j_n$, 并定义 $G : Y_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ 为公式

$$G(y, n+t) = \begin{cases} (g_n(y), n+2t), & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (h_{2t-1}^n(y), n+1), & \text{对于 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

我们将说明复合映射 $G f_\Sigma : X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ 是一个同伦等价。令 X_Σ^n 表示 X_Σ 的子集, 其由所有满足 $\tau \leq n$ 的配对 (x, τ) 组成。(因此, $X_\Sigma^n = X_0 \times [0, 1] \cup \cdots \cup X_{n-1} \times [n-1, n] \cup X_n \times [n]$)。复合映射 $G f_\Sigma$ 把 X_Σ^n 映射到它本身, 这个映射同伦于恒等映射。事实上, X_Σ^n 包括 $X_n \times [n]$ 作为形变收缩核, 并且映射 $G f_\Sigma$ 限制在 $X_n \times [n]$ 上可以和 $g_n f_n$ 等同起来, 所以同伦于恒等映射。因此, 我们可以对序列 $\{X_\Sigma^n\}$ 应用情形 1, 从而得到结论: $G f_\Sigma$ 是同伦等价。

这证明 f_Σ 由一个左同伦逆。一个类似地讨论说明 $f_\Sigma G : Y_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ 是一个同伦等价, 使得 f_Σ 由一个右同伦逆。这证明了 f_Σ 是一个同伦等价 (与第14页比较) 并且完成了定理 A 的证明。

□

推论. 假设 X 是 (X_i) 的同伦直极限。如果每个 X_i 具有一个 CW 复形的同伦型, 则 X 本身具有一个 CW 复形的同伦型。

证明不难。

参考文献

- [1] Richard S. Palais. “Morse Theory on Hilbert Manifolds”. *Topology*, 2: pp. 299–340. 1963.
- [2] Stephen Smale. “Morse Theory and a Non-linear Generalization of the Dirichlet Problem”. *Annals of Mathematics*, 802: pp. 382–396. 1964.
- [3] Michael Atiyah, and Raoul Bott. “On the Periodicity Theorem for Complex Vector Bundles”. *Acta Mathematica*, 112: pp. 229–247. 1964.
- [4] R. Wood. “Banach Algebras and Bott Periodicity”. *Topology*, 4: pp. 371–389. 1965.
- [5] John Milnor. *Lectures on the h-Cobordism Theorem*. Notes by L. Siebenmann and J. Sondow. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1965.
- [6] Marston Morse. *The Calculus of Variations in the Large*. Vol. 18. American Mathematical Society Colloquium Publications. Reprint of the 1932 original. Providence, RI: American Mathematical Society, 1996.
- [7] H. Seifert, and W. Threlfall. *Variationsrechnung im Grossen: (Theorie von Marston Morse)*. New York: Chelsea Publishing Company, 1951.
- [8] Raoul Bott. “The Stable Homotopy of The Classical Groups”. *Annals of Mathematics*, 702: pp. 313–337. 1959.
- [9] Raoul Bott. “Morse Theory and its Application to Homotopy Theory”. Lecture notes by A. van de Ven. 1960.
- [10] Garrett Birkhoff, and Saunders Mac Lane. *A Brief Survey of Modern Algebra*. Second. The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London, 1965.
- [11] Katsumi Nomizu. *Lie Groups and Differential Geometry*. Tokyo: The Mathematical Society of Japan, 1956.
- [12] Lawrence M. Graves. *The Theory of Functions of Real Variables*. Second. New York–Toronto–London: McGraw-Hill, 1956.
- [13] Stephen Smale. “Generalized Poincaré’s Conjecture in Dimensions Greater than Four”. *Annals of Mathematics*, 742: pp. 391–406. 1961.
- [14] J. H. C. Whitehead. “Combinatorial Homotopy. I”. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55: pp. 213–245. 1949.
- [15] J. H. C. Whitehead. “On Simply Connected, 4-dimensional Polyhedra”. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 22: pp. 48–92. 1949.
- [16] John W. Milnor. “Differential Topology”. In: *Lectures on Modern Mathematics*. Ed. by T. L. Saaty. Vol. II. New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1964, pp. 165–183.

- [17] Ronald Rosen. *A Weak Form of the Star Conjecture for Manifolds*. Abstract 570-28. 1960.
- [18] John W. Milnor. “On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere”. *Annals of Mathematics*, 642: pp. 399–405. 1956.
- [19] Jr. James Eells, and Nicolaas H. Kuiper. “Manifolds Which Are Like Projective Planes”. *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, 14: pp. 5–46. 1962.
- [20] Georges De Rham. *Variétés Différentiables*. English translation: *Differentiable Manifolds*, 1984. Paris: Hermann, 1960.
- [21] Hassler Whitney. *Geometric Integration Theory*. Originally published: Princeton University Press, 1957. Mineola, NY: Dover Publications Inc., 2005.
- [22] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Vol. 14. Princeton Mathematical Series. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1951.
- [23] Marston Morse. “The Critical Points of a Function of n Variables”. *Transactions of the American Mathematical Society*, 331: pp. 72–91. 1931.
- [24] Solomon Lefschetz. *L'Analyse Situs et la Géométrie Algébrique*. Paris: Gauthier-Villars, 1924.
- [25] Aldo Andreotti, and Theodore Frankel. “The Lefschetz Theorem on Hyperplane Sections”. *Annals of Mathematics*, 692: pp. 713–717. 1959.
- [26] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Vol. XII. Pure and Applied Mathematics. New York–London: Academic Press, 1962.
- [27] Shlomo Sternberg. *Lectures on Differential Geometry*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.
- [28] Detlef Laugwitz. *Differential and Riemannian Geometry*. Trans. by Fritz Steinhardt. New York–London: Academic Press, 1965.
- [29] J. H. C. Whitehead. “Convex Regions in the Geometry of Paths”. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1: pp. 33–42. 1932.
- [30] Georges De Rham. “Sur la Réductibilité d'un Espace de Riemann”. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 26: pp. 328–344. 1952.
- [31] Heinz Hopf, and Willi Rinow. “Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche”. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 31: pp. 209–225. 1931.
- [32] W. Ambrose. “The Index Theorem in Riemannian Geometry”. *Annals of Mathematics*, 732: pp. 49–86. 1961.
- [33] Richard L. Bishop, and Richard J. Crittenden. *Geometry of Manifolds*. AMS Chelsea Publishing. Reprint of the 1964 original. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001.
- [34] Noel J. Hicks. *Notes on Differential Geometry*. Van Nostrand Mathematical Studies 3. Princeton, N.J.–Toronto–London: D. Van Nostrand Co., Inc., 1965.
- [35] John Milnor. “On spaces having the homotopy type of a CW-complex”. *Transactions of the American Mathematical Society*, 902: pp. 272–280. 1959.
- [36] Jean-Pierre Serre. “Homologie Singulière des Espaces Fibrés. Applications”. *Annals of Mathematics*, 542: pp. 425–505. 1951.

- [37] Thomas J. Willmore. *An Introduction to Differential Geometry*. Oxford: Oxford University Press, 1959.
- [38] David Hilbert, and Stefan Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*. Trans. by P. Neményi. Translation of *Anschauliche Geometrie*, 1932. New York, N.Y.: Chelsea Publishing Company, 1952.
- [39] Michael F. Atiyah, Raul Bott, and A. Shapiro. “Clifford Modules”. *Topology*, 3(suppl. 1): pp. 3–38. 1964.
- [40] Marcel Berger. “Sur Certaines Variétés Riemanniennes à Courbure Positive”. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, 247: pp. 1165–1168. 1958.
- [41] Shiing-shen Chern. “On Curvature and Characteristic Classes of a Riemann Manifold”. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 20: pp. 117–126. 1955.
- [42] R. Courant. “Über die Abhängigkeit der Schwingungszahlen einer Membran von ihrer Begrenzung und über asymptotische Eigenwertverteilung”. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*: pp. 255–264. 1919.
- [43] Beno Eckmann. “Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition Quadratischer Formen”. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 15: pp. 358–366. 1943.
- [44] N. V. Efimov. “Impossibility of a Complete Regular Surface in Euclidean 3-Space Whose Gaussian Curvature Has a Negative Upper Bound”. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 150: pp. 1206–1209. 1963.
- [45] Samuel I. Goldberg. *Curvature and Homology*. Vol. XI. Pure and Applied Mathematics. New York–London: Academic Press, 1962.
- [46] Sze-tsen Hu. *Homotopy Theory*. Vol. VIII. Pure and Applied Mathematics. New York–London: Academic Press, 1959.
- [47] Kenkichi Iwasawa. “On Some Types of Topological Groups”. *Annals of Mathematics*, 502: pp. 507–558. 1949.
- [48] Sumner B. Myers. “Riemannian Manifolds with Positive Mean Curvature”. *Duke Mathematical Journal*, 8: pp. 401–404. 1941.
- [49] J. L. Synge. “On the Connectivity of Spaces of Positive Curvature”. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 71: pp. 316–320. 1936.
- [50] Kentaro Yano, and Salomon Bochner. *Curvature and Betti Numbers*. Annals of Mathematics Studies 32. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1953.
- [51] Élie Cartan. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris: Gauthier-Villars, 1926 and 1951.